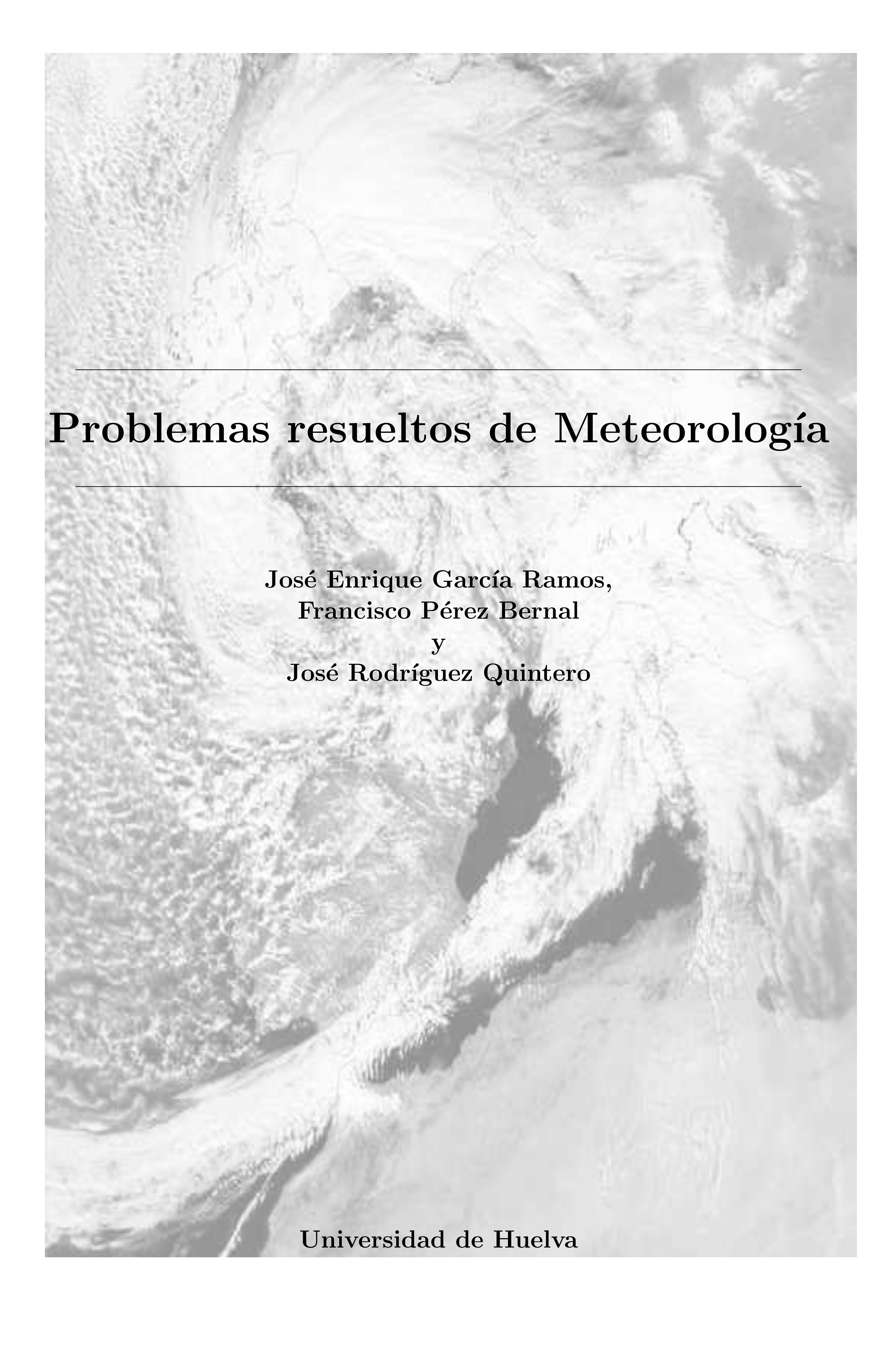


Problemas resueltos de Meteorología

José Enrique García Ramos,
Francisco Pérez Bernal
y
José Rodríguez Quintero

Universidad de Huelva



Prólogo

La presente colección de problemas resueltos se ofrece como ayuda al estudiante de la asignatura Meteorología y Climatología de tercer curso de la licenciatura en Ciencias Ambientales. Se han incluido soluciones detalladas de aproximadamente ochenta problemas y el manual puede encontrarse en la web de la asignatura [2].

Es necesaria una nota de advertencia. Tanto la Meteorología como la Climatología son importantes ramas de la ciencia que mezclan componentes diversos de la Física, la Geografía Física y la Estadística. Resulta, por tanto, muy difícil ofrecer en un breve manual como este una visión de todos los problemas de interés para estas ciencias. En concreto el manual se concentra en algunos aspectos físicos de la Meteorología, pudiendo distinguirse tres partes en el mismo. La primera parte (problemas 1 al 16) se dedica a problemas de propagación del calor por radiación, presentando diferentes casos de aplicación de la ley de Stefan–Boltzmann de interés climatológico. La segunda parte (problemas 17 al 58) se centra en la termodinámica del aire no saturado, tratándose casos tanto de aire seco como de aire húmedo, haciendo especial hincapié en problemas de ascenso adiabático y procesos politrópicos. La tercera y última parte del manual (problemas 58 al 83) se ocupa de la termodinámica del aire húmedo saturado ampliando los conceptos previamente tratados en el caso del aire no saturado Además, al comienzo de cada capítulo se ha incluido un resumen con los conceptos y fórmulas utilizados a lo largo del mismo.

La colección de problemas que se presenta se ha basado en libros bastante veteranos publicados por el Instituto Nacional de Meterología y en la propia cosecha de los autores. La principal diferencia entre este trabajo y las referencias antes citadas reside en la notación usada y en las explicaciones detalladas que se presentan y que sustituyen al mero uso de fórmulas, es decir se pretende en todo momento "explicar cómo se hacen los problemas"

Este manual ha sido concebido para los estudiantes de la licenciatura de Ciencias Ambientales aunque esperamos que pueda ser de ayuda para aquellos estudiantes de diversas licenciaturas que por primera vez se acerquen al estudio cuantitativo de problemas atmosféricos. Al no estar dirigido a estudiantes de Física se ha reducido la complejidad formal de los problemas presentados, se ha huído de desarrollos teóricos y se han simplificado al máximo las matemáticas usadas. Como requisitos necesarios para la comprensión de las materias presentadas es necesario que el lector tenga conocimientos básicos de Física General -en especial Termodinámica- y de Cálculo.

Los autores agradecen al Vicerrectorado de Innovación Docente de la Universidad de Huelva la ayuda finaciera prestada para llevar a cabo esta compilación de problemas. Esta ayuda nos ha permitido conceder una beca a Rocío Ortíz Gutiérrez, antigua alumna de la asignatura "Meteorología y Climatología", así como adquirir el material informático necesario. Es preciso resaltar el excelente trabajo realizado por Rocío escribiendo en formato LaTeX las soluciones de los problemas que previamente había recogido (y completado) en nuestras clases.

Huelva, septiembre de 2005.
Los autores.

[2] http://www.uhu.es/gem/docencia/meteo-ccaa/

Índice general

1. Radiación, equilibrio radiativo y temperatura **3**
1.1. Fórmulas de interés 3
1.1.1. Leyes del cuerpo negro 3
1.1.2. Constante solar 3
1.1.3. Temperatura de equilibrio 4
1.2. Problemas resueltos 5

2. Termodinámica del aire no saturado **19**
2.1. Fórmulas de interés 19
2.1.1. Ecuación del gas ideal 19
2.1.2. Ascenso adiabático de masas de aire 20
2.1.3. Nivel de equilibrio 20
2.1.4. Procesos politrópicos 21
2.1.5. Algunas definiciones útiles 22
2.2. Problemas resueltos 23

3. Termodinámica del aire saturado **71**
3.1. Fórmulas de interés 71
3.1.1. Humedad relativa 71
3.1.2. Ecuación de Clausius-Clapeyron 71
3.1.3. Elevación adiabática 72
3.1.4. Nivel de condensación 73
3.1.5. Elevación pseudo-adiabática 73
3.1.6. Algunas definiciones útiles 74
3.2. Problemas resueltos 75

Capítulo 1

Radiación, equilibrio radiativo y temperatura

1.1. Fórmulas de interés

1.1.1. Leyes del cuerpo negro

Dado un cuerpo negro a una temperatura T, sabemos que su *emitancia radiante monocromática*, $R(\lambda, T)$ viene dada por la ley de **Planck**. Si integramos en todo el rango de longitudes de onda obtendremos la *emitancia radiante*, R[1], expresada por la ley de **Stefan-Boltzmann**,

$$R_B = \int_0^\infty d\lambda R(\lambda, T) = \sigma T^4 \ ; \qquad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}} \ . \tag{1.1}$$

El valor de longitud de onda para el cual la *emitancia radiante monocromática* será máxima, viene dado por la ley del **desplazamiento de Wien** que puede derivarse como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} R_B(\lambda_M, T) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_M T = 2{,}9 \cdot 10^{-3} mK \tag{1.2}$$

La ley de **Kirchhoff** nos dice que cualquier cuerpo no negro inmerso en un baño de radiación y en equilibrio con éste a la temperatura T, emitirá según

$$R(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda) R_B(\lambda, T) \tag{1.3}$$

donde ε es el coeficiente de *emisividad* que será equivalente al de *absortividad*. Si, además, suponemos que este coeficiente es independiente de la longitud de onda, entonces podremos expresar la *radiancia* o *emitancia radiante total* para cualquier cuerpo radiante como

$$R = \varepsilon \sigma T^4 \tag{1.4}$$

1.1.2. Constante solar

Considerado nuestro sol, o cualquier otra estrella, como un cuerpo negro radiante a la temperatura T_S y con un radio R_S, la potencia radiada, P, que llega a un punto separado de dicha estrella por el vector $\vec{r}$ y a una superfice diferencial ds, caracterizada por el vector unitario normal $\vec{n}$, viene dada por

[1] Para referirnos a la *emitancia radiante* también puede usarse la letra M.

$$dP = \vec{\phi}(\vec{r})d\vec{s} \ = \ \frac{dP}{d\Omega}\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}\ ds = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{r}\right)^2 \cos\theta\ ds\ , \tag{1.5}$$

siendo, en la aproximación de radiación isótropamente distribuida,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{P_{\rm total}}{4\pi} = R_S^2 R_B(T_S)\ ; \tag{1.6}$$

y donde θ define el ángulo que forman la dirección de incidencia de los rayos luminosos y la normal a la superficie. El flujo radiante, $\phi(r)$, definido en esta última ecuación, calculado para $\theta = 0$ (orientación normal) y para $r = R_{T-S}$ (distancia Tierra-Sol) se denomina constante solar y se designa con la letra S,

$$S \ = \ \phi(R_{T-S}, \theta = 0) = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{R_{T-S}}\right)^2 \tag{1.7}$$

Para los parámetros característicos del sol y de la Tierra, el valor de la constante solar es $S = 1400\ W/m^2$.

1.1.3. Temperatura de equilibrio

La potencia recibida por cualquier placa plana, de superficie Δs, situada en la Tierra, dado que el ángulo sólido sustendido por ella desde el Sol es muy pequeño, se puede escribir muy aproximadamente como:

$$P \ = \ S\cos\theta\ \Delta s\ . \tag{1.8}$$

La potencia total recibida por todo el planeta, P_0, corresponde a la recibida por la sección plana máxima del mismo, es decir por su disco, se tiene por tanto,

$$P_0 \ = \ S\ \pi r_T^2\ , \tag{1.9}$$

siendo r_T el radio de la Tierra. Igualando la potencia total absorbida por el planeta (que es la potencia total recibida menos la reflejada) a la que éste radiará a su vez y suponiéndolo un cuerpo negro que se encuentra en equilibrio radiativo a la temperatura T_{eq} con el Sol, se tendrá:

$$(1-a)P_0 = (1-a)S\ \pi r_T^2 \ = \ 4\pi r_T^2 \sigma T_{eq}^4 \quad \Rightarrow \quad T_{eq} = \left(\frac{(1-a)S}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1.10}$$

1.2. Problemas resueltos

1. Determínese el valor de la constante de la ley de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5{,}67\,10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}) en unidades del sistema CGS y en Lang min^{-1} K^{-4}. Nota 1 Langley = 1 cal cm^{-2}.

   Solución:

   - Conversión a unidades del sistema CGS:

   $$\frac{5{,}67\,10^{-8}\mathrm{J}}{\mathrm{s\,m^2\,K^4}} \cdot \frac{10^7\mathrm{erg}}{1\,\mathrm{J}} \cdot \frac{1\,\mathrm{m}^2}{10^4\,\mathrm{cm}^2} = 5{,}67\,10^{-5}\mathrm{erg\,s^{-1}\,K^{-4}\,cm^{-2}}$$

   - Conversión a Lang min^{-1}K^{-4}:

   $$\frac{5{,}67\,10^{-8}\mathrm{J}}{\mathrm{s\,m^2\,K^4}} \cdot \frac{1\,\mathrm{cal}}{4{,}18\,\mathrm{J}} \cdot \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} \cdot \frac{1\,\mathrm{m}^2}{10^4\,\mathrm{cm}^2} = 8{,}13\,10^{-11}\,\mathrm{Lang\,min^{-1}\,K^{-4}}$$

---

2. Calcúlese el flujo de energía radiante emitido por la Tierra, considerada como un cuerpo negro esférico a la temperatura de 300 K y cuyo radio es de 6370 km. ¿Cuál es el poder emisivo total (irradiancia) de la Tierra?

   Solución:

   - En primer lugar calculamos la emitancia radiante (potencia emitida por unidad de superficie) aplicando la ley de Stefan-Boltzman:

   $$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \sigma\,\mathrm{T}^4 \\ \mathrm{M} &= 5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \cdot 300^4\,\mathrm{K}^4 \\ \mathrm{M} &= 459{,}3\,\mathrm{Wm^{-2}} \end{aligned}$$

   - A continuación calculamos la irradiancia (poder emisivo total) de la Tierra:

   $$\mathrm{P} = \mathrm{M\,A}$$

   siendo M la emitancia radiante y A la superficie de la Tierra.

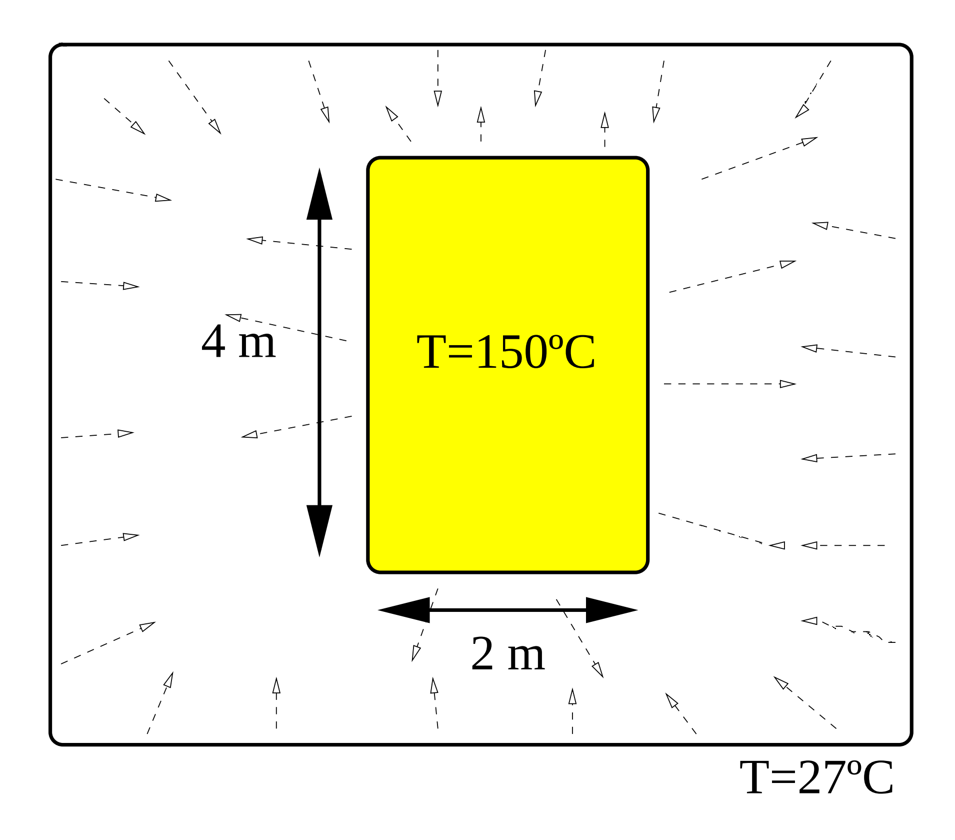
   $$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \sigma\,\mathrm{T}^4 4\pi\mathrm{R}^2 \\ \mathrm{P} &= 5{,}67\,10^{-8}\mathrm{Wm^{-2}\,K^{-4}} \cdot 300^4\mathrm{K}^4 \cdot 4\pi\,(6370\,10^3\,\mathrm{m})^2 \\ \mathrm{P} &= 2{,}3\,10^{17}\mathrm{W} \end{aligned}$$

---

3. El almacenador de energía de una central solar está constituido por una cisterna cilíndrica de 2 m de diámetro y 4 m de altura, cuya superficie presenta una emisividad de 0,5 y que contiene aceite a la temperatura de 150°C. La cisterna está situada en un recinto en el que la temperatura se mantiene constante e igual a 27°C y se observa que las pérdidas de calor radiante son muy elevadas, por lo que vuelve a repintarse la cisterna con un

barniz de emisividad 0,3. Calcúlese el tanto por ciento de reducción de pérdidas de flujo de energía radiante si **(a)** el coeficiente de emisividad es idéntico a ambas temperaturas **(b)** el depósito se comporta como un cuerpo negro al absorber la energía radiante del entorno. Calcúlese también la potencia emitida por el depósito para ambos valores de la emisividad.

Solución:



- El flujo de energía radiante se define a partir de la siguiente expresión:

$$H = \frac{\delta Q}{\delta t} = M_{dep} - M_{par} = \varepsilon\,\sigma\,(T^4_{dep} - T^4_{par})$$

(a) Caso 1: Cálculo de la pérdida de energía radiante y de la potencia emitida para coeficientes de emisividad idénticos a ambas temperaturas.

- En nuestro caso, como presentan idéntica emisividad, los flujos de energía radiante serán:

$$\begin{aligned} H_0 &= \varepsilon_0\,\sigma\,(T^4_{dep} - T^4_{par}) \\ H_1 &= \varepsilon_1\,\sigma\,(T^4_{dep} - T^4_{par}) \end{aligned}$$

- Así pues, la pérdida de energía radiante resultará:

$$\frac{H_0 - H_1}{H_0} = \frac{\varepsilon_0\,\sigma\,(T_{dep}^4 - T_{par}^4) - \varepsilon_1\,\sigma\,(T_{dep}^4 - T_{par}^4)}{\varepsilon_0\,\sigma\,(T_{dep}^4 - T_{par}^4)}$$

$$\frac{H_0 - H_1}{H_0} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_0} = \frac{0{,}5 - 0{,}3}{0{,}5}\cdot 100 = 40\,\%$$

- La potencia emitida por todo el depósito cuando $\varepsilon = 0{,}5$ será $P = M\,A$, donde M es la emitancia radiante y A la superficie de la cisterna cilíndrica.

$$P = M \cdot A$$
$$P = \varepsilon_0\,\sigma\,T_{dep}^4\,(2\pi\,r^2 + 2\pi\,r\,h)$$
$$P = 0{,}5 \cdot 5{,}67\,10^{-8}\,W\,m^{-2}\,K^{-4} \cdot 423^4\,K^4 \cdot 10\pi\,m^2$$
$$P = 28514\,W$$

(b) Caso 2: Cálculo de la pérdida de energía radiante y de la potencia emitida cuando el depósito se comporta como un cuerpo negro.

- En este caso, como el depósito se comporta como un cuerpo negro absorberá toda la energía del entorno, por lo que los flujos de energía radiante serán:

$$H_0' = \varepsilon_0\,\sigma\,T_{dep}^4 - \sigma\,T_{par}^4$$
$$H_1' = \varepsilon_1\,\sigma\,T_{dep}^4 - \sigma\,T_{par}^4$$

- Así pues, la pérdida de energía radiante resultará:

$$\frac{H_0' - H_1'}{H_0'} = \frac{\varepsilon_0\,\sigma\,T_{dep}^4 - \sigma\,T_{par}^4 - \varepsilon_1\,\sigma\,T_{dep}^4 + \sigma\,T_{par}^4}{\varepsilon_0\,\sigma\,T_{dep}^4 - \sigma\,T_{par}^4}$$

$$\frac{H_0' - H_1'}{H_0'} = \frac{\varepsilon_0 \cdot T_{dep}^4 - \varepsilon_1 \cdot T_{dep}^4}{\varepsilon_0 \cdot T_{dep}^4 - T_{par}^4}$$

$$\frac{H_0' - H_1'}{H_0'} = \frac{0{,}5 \cdot 423^4\,K^4 - 0{,}3 \cdot 423^4\,K^4}{0{,}5 \cdot 423^4\,K^4 - 300^4\,K^4}$$

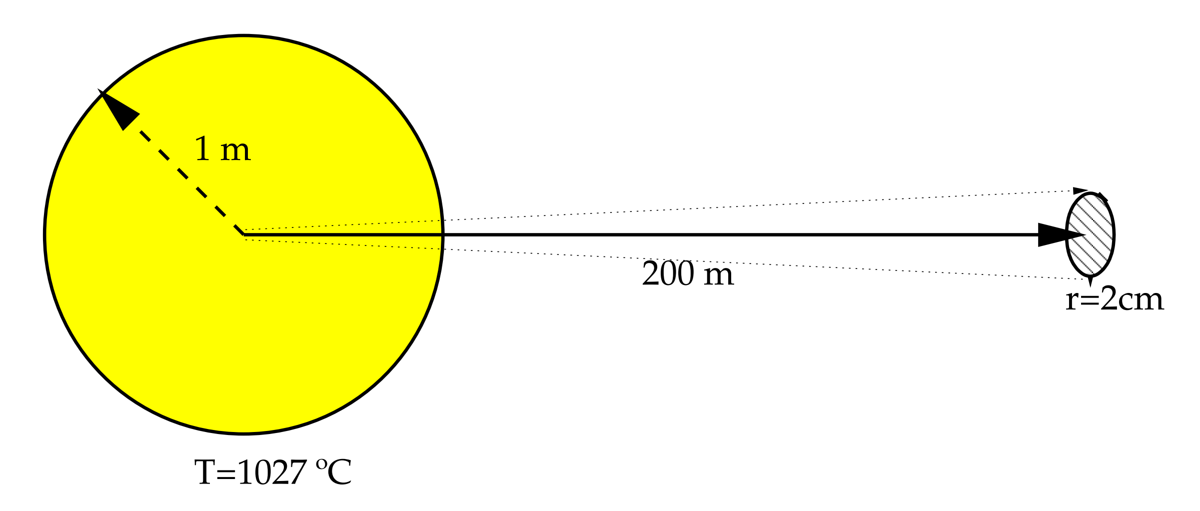
$$\frac{H_0' - H_1'}{H_0'} = 81\,\%$$

- La potencia emitida por todo el depósito cuando $\varepsilon = 0{,}3$ será:

$$P' = M \cdot A$$
$$P' = \varepsilon_1\,\sigma\,T_{dep}^4\,(2\pi\,r^2 + 2\pi\,r\,h)$$
$$P' = 0{,}3 \cdot 5{,}67\,10^{-8}\,W\,m^{-2}\,K^{-4} \cdot 423^4\,K^4 \cdot 10\pi\,m^2$$
$$P' = 17109\,W$$

---

4. Una esfera metálica de 1 m de radio se calienta a 1027°C. La esfera está recubierta de una capa de pintura de emisividad 0,8. Determínese el flujo de radiación térmica que recibirá una superficie circular de cuerpo negro de 2 cm de radio situada perpendicularmente al radio de la esfera y a 200 m de distancia del centro de la misma.



Solución:

- En primer lugar calculamos la emitancia radiante de la esfera, para lo cual empleamos la ley de Stefan-Boltzman:

$$\mathrm{M} = \varepsilon\,\sigma\,\mathrm{T}^4$$

- A continuación calculamos el poder emisivo total de la esfera:

$$\mathrm{P} = \mathrm{M\,A} = \varepsilon\sigma\,\mathrm{T}^4 4\pi\mathrm{R}^2$$

- Por último calculamos el flujo de radiación térmica que recibe la superficie circular:

$$\mathrm{P} = \frac{\varepsilon\sigma\,\mathrm{T}^4 4\pi\mathrm{R}^2}{4\pi\,\mathrm{D}^2}\,\pi\,\mathrm{r}^2$$

Nótese que $\pi\,\mathrm{r}^2/4\pi\,\mathrm{D}^2$ es la fracción de potencia recibida por el disco, asumiendo que el disco cae sobre la esfera de radio D.

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{0{,}8\cdot 5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}\cdot 1300^4\,\mathrm{K}^4\cdot 1^2\,\mathrm{m}^2}{200^2\,\mathrm{m}^2}\,\pi\,(2\cdot 10^{-2}\mathrm{m})^2 \\ \mathrm{P} &= 4{,}07\cdot 10^{-3}\,W \end{aligned}$$

---

5. Calcúlese la temperatura de equilibrio de una superficie horizontal con albedo a = 0,4 en una latitud de 40°N a las 12 : 00 horas del mediodía del **(a)** equinoccio de primavera, **(b)** solsticio de verano, sabiendo que la constante solar S = 1400 W y que se desprecian los efectos debidos a la conducción del calor.

Solución:

(a) Cálculo de la temperatura de equilibrio (T_{eq}) en el equinoccio de primavera:

- Partimos del equilibrio que debe existir entre la potencia absorbida y emitida por la placa; además conocemos que en los equinoccios la radiación solar incide perpendicularmente en el ecuador, por lo que (en nuestro caso) el ángulo de inclinación de dicha radiación coincide con la latitud. Así pues, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P_{emi} &= P_{abs} \\
\sigma\, T_{eq}^4\, A &= (1 - a)\, S\, A\, \cos\alpha \\
T_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1 - a)\, S\, \cos\alpha}{\sigma}} \\
T_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1 - 0{,}4) \cdot 1400\, W\, m^{-2} \cdot \cos 40^\circ}{5{,}67 \cdot 10^{-8} W\, m^{-2}\, K^{-4}}} \\
T_{eq} &= 326,4\, K = 53{,}4\,^\circ C
\end{aligned}
$$

(b) Cálculo de la temperatura de equilibrio (T_{eq}) en el solsticio de verano:

- Partimos, de nuevo, del equilibrio radiativo existente; además conocemos que en el sosticio de verano la radiación solar incide perpendicularmente sobre el Trópico de Cáncer, por lo que nuestro ángulo de inclinación solar ya no coincide con la latitud, sino que habrá que restarle el ángulo de inclinación del eje rotacional terrestre, siendo por tanto, $\alpha' = 40^\circ - 23{,}5^\circ = 16{,}5^\circ$

$$
\begin{aligned}
P_{emi} &= P_{abs} \\
\sigma\, T_{eq}^4\, A &= (1 - a)\, S\, A\, \cos\alpha' \\
T_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1 - a)\, S\, \cos\alpha'}{\sigma}} \\
T_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1 - 0{,}4) \cdot 1400\, W\, m^{-2} \cdot \cos 16{,}5^\circ}{5{,}67 \cdot 10^{-8}\, W\, m^{-2}\, K^{-4}}} \\
T_{eq} &= 345,1\, K = 72{,}1^\circ C
\end{aligned}
$$

---

6. Las estrellas pueden considerarse como cuerpos negros. Si se sabe que las longitudes de onda correspondientes a las intensidades máximas de emisión son para la estrella Vega de 2070 Å (ultravioleta) y para la estrella Antares 11600 Å (infrarrojo), determine las temperaturas de las superficies de ambas, así como su emitancia radiante. Nota: 1 Å=10^{-10} m.

   Solución:

   - Para el cálculo de las temperaturas de ambas estrellas aplicamos la ley de Wien:

$$\begin{aligned}
\lambda_{max} \cdot \mathrm{T} &= \mathrm{B} \\
\mathrm{T} &= \frac{\mathrm{B}}{\lambda_{max}} \\
\mathrm{T}_{Vega} &= \frac{2{,}897\,10^{-3}\mathrm{m\,K}}{2070\,10^{-10}\mathrm{m}} \approx 14000\,\mathrm{K} \\
\mathrm{T}_{Antares} &= \frac{2{,}897\,10^{-3}\mathrm{m\,K}}{11600\,10^{-10}\mathrm{m}} \approx 2500\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

- Para el cálculo de la emitancia radiante nos basamos en la ley de Stefan-Boltzman:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \sigma\,\mathrm{T}^4 \\
\mathrm{M}_{Vega} &= 5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot 14010^4\,\mathrm{K}^4 = 2{,}18\,10^9\,\mathrm{W/m^2} \\
\mathrm{M}_{Antares} &= 5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot 2500^4\,\mathrm{K}^4 = 2{,}21\,10^6\,\mathrm{W/m^2}
\end{aligned}$$

---

7. Imagina un planeta X sin atmósfera situado a una distancia del Sol D = $1{,}5 \times 10^8$ km. Si su albedo es a = 0,35, ¿cual será su temperatura de equilibrio?. Imagina la presencia de agua en abundancia en ese planeta, sabiendo que el albedo promedio para superficies heladas es a = 0,85, ¿cuál será, en esas condiciones, la temperatura de equilibrio? ¿Serían diferentes tus anteriores respuestas si el planeta **X** tuviese el tamaño de la Tierra o el de Marte?. (Considera al planeta X y al Sol como cuerpos negros perfectos).

   Datos: $\mathrm{R}_S = 6{,}96 \times 10^5$ km; $\mathrm{T}_S = 6000$ K.

   Solución:

   (a) Para el caso de a=0,35

   - El equilibrio radiativo se alcanzará cuando la potencia absorbida por el planeta se iguale a la potencia emitida por el mismo. Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{abs} &= \mathrm{P}_{emi} \\
(1-a)\,\mathrm{S}\,\pi\,\mathrm{R}_x^2 &= \mathrm{M\,A} \\
(1-a)\frac{\sigma\,\mathrm{T}_s^4\,4\pi\,\mathrm{R}_s^2}{4\pi\,\mathrm{D}^2}\pi\,\mathrm{R}_x^2 &= \sigma\,\mathrm{T}_{eq}^4\,4\pi\,\mathrm{R}_x^2
\end{aligned}$$

   Nótese que se absorbe en una superficie de $\pi\,\mathrm{R}^2$ y se emite en una superficie de $4\pi\,\mathrm{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1-a)\mathrm{R}_s^2}{4\,\mathrm{D}^2}}\,\mathrm{T}_s \\
\mathrm{T}_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1-0{,}35)(6{,}96\,10^8\,\mathrm{m})^2}{4\,(1{,}5\,10^{11}\,\mathrm{m})^2}} \cdot 6000\,\mathrm{K} \\
\mathrm{T}_{eq} &= 259\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(b)Para el caso de a=0,85

- Procedemos de la misma manera que en el apartado anterior hasta llegar a la expresión de T_{eq}, donde sustituimos el nuevo valor de a.

$$\begin{aligned}
P_{abs} &= P_{emi} \\
(1-a)\,S\,\pi\,R_x^2 &= M\,A \\
(1-a)\frac{\sigma\,T_s^4\,4\pi\,R_s^2}{4\pi\,D^2}\pi\,R_x^2 &= \sigma\,T_{eq}^4\,4\pi\,R_x^2 \\
T_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1-a)R_s^2}{4\,D^2}}\,T_s \\
T_{eq} &= \sqrt[4]{\frac{(1-0{,}85)(6{,}96\,10^8\,\mathrm{m})^2}{4\,(1{,}5\,10^{11}\,\mathrm{m})^2}}\cdot 6000\,\mathrm{K} \\
T_{eq} &= 180\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(c) ¿Serían distintas las respuestas si el planeta tuviera el tamaño de Marte o la Tierra?

- La respuesta seguiría siendo la misma puesto que la temperatura de equilibrio tan sólo depende del albedo, el radio y la temperatura del sol y la distancia. En ningún momento depende del tamaño de los planetas, puesto que R_x, al estar en ambos miembros, desaparece.

---

8. El Sol puede considerarse como un cuerpo negro a temperatura de 6000 K. Determínese la longitud de onda correspondiente a la intensidad de emisión máxima de la radiación solar.

Solución:

- Aplicamos la Ley de Wien:

$$\begin{aligned}
\lambda_{max}\cdot T &= B \\
\lambda_{max} &= \frac{B}{T} = \frac{2{,}897\,10^{-3}\mathrm{m\,K}}{6000\,\mathrm{K}} \\
\lambda_{max} &= 4{,}83\,10^{-7}\,\mathrm{m} = 483\,\mathrm{nm}
\end{aligned}$$

---

9. La longitud de onda correspondiente a la intensidad de emisión máxima de la radiación solar es 4800 Å. ¿Cuál es la temperatura de la superficie solar?. ¿A qué longitud de onda correspondería la emisión de intensidad máxima si la temperatura de la superficie del Sol aumentara 2000°C?

Solución:

- Aplicamos la Ley de Wien:

$$\lambda_{max} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{B}$$

- La temperatura del sol (T_{sol}) será la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{sol} &= \frac{\mathrm{B}}{\lambda_{max}} \\ \mathrm{T}_{sol} &= \frac{2{,}897\,10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{4800\,10^{-10}\,\mathrm{m}} \\ \mathrm{T}_{sol} &= 6035{,}4\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

- La longitud de onda de máxima emisión (λ_{max}) será:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} &= \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{T}} = \frac{2{,}897\,10^{-3}\mathrm{m\,K}}{8035{,}4\,\mathrm{K}} \\ \lambda_{max} &= 3{,}60\,10^{-7}\,\mathrm{m} = 360\,\mathrm{nm} \end{aligned}$$

---

10. Calcúlese la temperatura de la superficie del Sol, considerado como un cuerpo negro esférico de $7\,10^5$ km de radio, suponiendo que la Tierra describe una órbita circular a su alrededor de $1{,}5\,10^8$ km de radio y sabiendo que el valor de la constante solar es de 2 Langley min^{-1}.

Solución:

- En primer lugar, expresamos la constante solar en unidades del S.I:

$$\mathrm{S} = \frac{2\,\mathrm{cal}}{\mathrm{cm}^2\,\mathrm{min}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^4\,\mathrm{cm}^2}{1\,\mathrm{m}^2} \cdot \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \approx 1400\,\mathrm{W/m}^2$$

- La expresión de la constante solar (S) es, por definición, la siguiente:

$$\mathrm{S} = \frac{\sigma\,\mathrm{T}_s^4\,4\pi\,\mathrm{R}_s^2}{4\pi\,\mathrm{D}^2}$$

- Despejamos por tanto la temperatura del sol (T_s) de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_s &= \sqrt[4]{\frac{\mathrm{D}^2\,\mathrm{S}}{\sigma\,\mathrm{R}_s^2}} \\ \mathrm{T}_s &= \sqrt[4]{\frac{(1{,}5\,10^{11}\,\mathrm{m})^2 \cdot 1400\,\mathrm{W\,m}^{-2}}{5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m}^{-2}\,\mathrm{K}^{-4} \cdot (7\,10^8\,\mathrm{m})^2}} \\ \mathrm{T}_s &= 5803\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

---

11. El valor de la constante solar es de 2 Langley $\cdot$ min^{-1}, obtenido al tomar el Sol como un cuerpo negro a la temperatura de 6000 K. ¿Cuál sería la temperatura de equilibrio de radiación de la Tierra en ausencia de atmósfera si su superficie recibiera 0,5 Langley$\cdot$min^{-1} de radiación solar? ¿Cuál sería la temperatura de la superficie del Sol en estas condiciones si el radio del sol fuera $7\,10^5$ km y la distancia media tierra-sol fuera de $1{,}5 \cdot 10^8$ km?
Solución:

- En primer lugar expresamos la constante solar en unidades del S.I.:

$$\mathrm{S} = 0{,}5 \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{cm^2\,min}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^4\,\mathrm{cm^2}}{1\,\mathrm{m^2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} \approx 349\,\mathrm{W/m^2}$$

(a) La temperatura de equilibrio de la Tierra, (T_e), sería:

- Partimos de una situación de equilibrio entre el Sol y la Tierra, por lo que la potencia absorbida por el planeta debe ser igual a la emitida por el mismo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{abs} &= \mathrm{P}_{emi} \\
\mathrm{S}\,\pi\,\mathrm{R}_T^2 &= \sigma\,\mathrm{T}_e^4\,4\pi\,\mathrm{R}_T^2 \\
\mathrm{T}_e &= \sqrt[4]{\frac{\mathrm{S}}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{349\,\mathrm{W\,m^{-2}}}{4 \cdot 5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}}} \\
\mathrm{T}_e &= 198\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(b) La temperatura de la superficie del Sol, (T_s), sería:

- Usando la definición de la constante solar:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \frac{\sigma\,\mathrm{T}_s^4\,4\pi\,\mathrm{R}_s^2}{4\pi\,\mathrm{D}^2} \\
\mathrm{T}_s &= \sqrt[4]{\frac{\mathrm{S\,D^2}}{\sigma\,\mathrm{R}_S^2}} \\
\mathrm{T}_s &= \sqrt[4]{\frac{349\,\mathrm{W\,m^{-2}} \cdot (1{,}5 \cdot\, 10^{11}\,\mathrm{m})^2}{5{,}67 \cdot\, 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot (7 \cdot\, 10^8\,\mathrm{m})^2}} \\
\mathrm{T}_s &= 4100\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

---

12. Calcúlese la cantidad de calor por unidad de área y unidad de tiempo expresada en kcal cm$^{-2}\cdot$h^{-1} que ha de transmitir la Tierra a la atmósfera por procesos no radiativos para que se establezca el equilibrio, sabiendo que la superficie terrestre recibe 0,261 Langley min^{-1}

en forma de radiación solar directa y difusa, que recibe también 0,456 Langley min^{-1} procedente de la atmósfera en forma de radiación de onda larga y que la radiación de onda larga de la Tierra hacia la atmósfera y el espacio es de 0,567 Langley min^{-1}. Determínese también la temperatura de la superficie terrestre suponiendo que radia como un cuerpo negro.

Solución:

(a) Cantidad de calor transmitida por la Tierra por procesos no radiativos :

- Para que se establezca el equilibrio, la potencia absorbida por la Tierra debe ser igual a la potencia emitida, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{P}}_{abs} &= \widetilde{\mathrm{P}}_{emi} \\
\widetilde{\mathrm{P}}_{r.dir} + \widetilde{\mathrm{P}}_{o.lar} &= \widetilde{\mathrm{P}}_{atm} + \widetilde{\mathrm{P}}_{no\,rad} \\
\widetilde{\mathrm{P}}_{no\,rad} &= \widetilde{\mathrm{P}}_{r.dir} + \widetilde{\mathrm{P}}_{o.lar} - \widetilde{\mathrm{P}}_{atm}
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{\mathrm{P}}$ es una potencia por unidad de superficie

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{P}}_{no\,rad} &= 0{,}261\,\mathrm{Langley\,min^{-1}} + 0{,}456\,\mathrm{Langley\,min^{-1}} - 0{,}567\,\mathrm{Langley\,min^{-1}} \\
\widetilde{\mathrm{P}}_{no\,rad} &= 0{,}15\,\mathrm{Langley\,min^{-1}}
\end{aligned}$$

- Pasamos esta energía a unidades de $\mathrm{Kcal/cm^2\,h}$:

$$\widetilde{\mathrm{P}}_{no\,rad} = 0{,}15 \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{cm^2\,min}} \cdot \frac{1\,\mathrm{kcal}}{1000\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{60\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{h}} = 0{,}009\,\mathrm{kcal/(cm^2 \cdot h)}$$

(b) Temperatura de la superficie terrestre:

- La potencia que emite la Tierra hacia la atmósfera mediante procesos radiativos (emitancia) es 0,567 langley/min. En unidades del S.I. será:

$$\mathrm{M} = 0{,}567 \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{cm^2\,min}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^4\,\mathrm{cm^2}}{1\,\mathrm{m^2}} \cdot \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} = 395\,\mathrm{W/m^2}$$

- Así pues, aplicando la ley de Stefan-Boltzman calculamos dicha temperatura:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \sigma\,\mathrm{T}^4 \\
\mathrm{T} &= \sqrt[4]{\frac{\mathrm{M}}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{395\,\mathrm{W\,m^{-2}}}{5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}}} \\
\mathrm{T} &= 289\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

13. Un telescopio con un objetivo de un metro de radio está dotado de un dispositivo que permite medir la energía recibida por cada frecuencia. Orientando el telescopio hacia una estrella lejana de tipo medio, medimos que la longitud de onda para la que se obtiene el máximo de energía es $\lambda = 4700$ Å, y que tras 20 minutos de exposición la energía total recibida, barriendo todas las frecuencias, es de 6 mJ. ¿A qué distancia se encuentra la estrella, si suponemos que su radio es el del Sol? (Nota: $\mathrm{R}_s = 7\,10^5$ km)

Solución:

- La potencia absorbida por el telescopio en unidades del S.I. será:

$$\mathrm{P} = \frac{6\,10^{-3}\,\mathrm{J}}{20\,\mathrm{min}} \cdot \frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} = 5\,10^{-6}\,\mathrm{W}$$

- Por otro lado, aplicando la ley de Wien, podemos calcular la temperatura de la estrella:

$$\begin{aligned} \lambda_{max} \cdot \mathrm{T} &= \mathrm{B} \\ \mathrm{T} &= \frac{\mathrm{B}}{\lambda_{max}} \\ \mathrm{T} &= \frac{2{,}897\,10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{4700\,10^{-10}\,\mathrm{m}} \\ \mathrm{T} &= 6164\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

- Por último, basándonos en la ley de Stefan–Boltzmann, procedemos a calcular dicha distancia:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{abs} &= 5\,10^{-6}\mathrm{W} \\ \mathrm{P}_{abs} &= \frac{\sigma\,\mathrm{T}^4\,4\pi\mathrm{R}_s^2}{4\pi\,\mathrm{D}^2} \cdot \pi\,\mathrm{r}^2 = 5\,10^{-6}\,\mathrm{W} \\ \mathrm{D} &= \sqrt{\frac{\sigma\,\mathrm{T}^4\,\mathrm{R}_s^2\,\pi\,\mathrm{r}^2}{\mathrm{P}_{abs}}} \\ \mathrm{D} &= \sqrt{\frac{5{,}67\ 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}} \cdot\ 6164^4\,\mathrm{K}^4 \cdot\ (7\,10^8\,\mathrm{m})^2\,\pi \cdot 1\,\mathrm{m}^2}{5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{W}}} \\ \mathrm{D} &= 5{,}02\,10^{15}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

---

14. Es bien sabido que los termómetros para medir la temperatura atmosférica no pueden estar expuestos directamente al sol. Considere dos termómetros con idéntica emisividad ε para longitudes de onda largas (correspondientes a la radiación que emiten) pero con diferente emisividad para longitudes de onda cortas (correspondientes a la radiación que absorben), $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Si sobre ambos termómetros incide directamente la radiación solar, calcule cuál alcanzará mayor temperatura.

Solución:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rightarrow \text{para la radiación emitida (onda larga)}$$

$$\varepsilon_1' > \varepsilon_2' \rightarrow \text{para la radiación absorbida (luz visible)}$$

- Teniendo en cuenta los datos aportados y el equilibrio que debe establecerse (potencia absorbida es igual a la potencia emitida), tenemos que:

$$\mathrm{P}_{abs} = \mathrm{P}_{emi}$$

$$\text{Termómetro}\,1 \rightarrow \varepsilon_1' \,\widetilde{\mathrm{S}}\,\mathrm{A} = \varepsilon_1\,\sigma\,\mathrm{T}_1^4\,\mathrm{A}'$$

$$\text{Termómetro}\,2 \rightarrow \varepsilon_2' \,\widetilde{\mathrm{S}}\,\mathrm{A} = \varepsilon_2\,\sigma\,\mathrm{T}_2^4\,\mathrm{A'}$$

donde $\widetilde{\mathrm{S}}$ es proporcional a la constante solar, A es el área sobre la que se recibe radiación y A' es el área sobre la que se emite.

- Dividiendo ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$\varepsilon_1'/\varepsilon_2' \;=\; \mathrm{T}_1^4/\mathrm{T}_2^4$$

- Como $\varepsilon_1' > \varepsilon_2'$ esto significa que $\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2$

---

15. El valor de la constante solar es $\mathrm{S} = 1400\ \mathrm{W/m^2}$. Si la distancia Tierra-Sol aumenta un 6 % calcule el nuevo valor de la constante solar y la nueva temperatura de equilibrio teniendo en cuenta que el albedo de la tierra a = 0,3. A la vista del resultado, ¿debe comentar algo acerca de la validez del valor de la temperatura calculado?

Solución:

(a) Nueva constante solar (S'):

Si la distancia T-Sol (D) aumenta un 6 %, la nueva distancia será:

$$\mathrm{D}' = \mathrm{D} + 0{,}06\mathrm{D} = 1{,}06\mathrm{D}$$

Y la nueva constante solar (S') sería:

$$\mathrm{S}' = \frac{\sigma\,\mathrm{T}^4\,4\pi\,\mathrm{R}_S^2}{4\pi\,\mathrm{D}'^2} \;=\; \frac{\sigma\,\mathrm{T}^4\,4\pi\,\mathrm{R}_S^2}{4\pi\,(1{,}06\mathrm{D})^2} = \frac{\mathrm{S}}{1{,}06^2}$$
$$\mathrm{S}' = \frac{1400}{1{,}06^2} \;=\; 1246\,\mathrm{W/m^2}$$

Es decir, la constante solar disminuye ≈ 12 %.

(b) Nueva temperatura de equilibrio de la Tierra (T_e'):

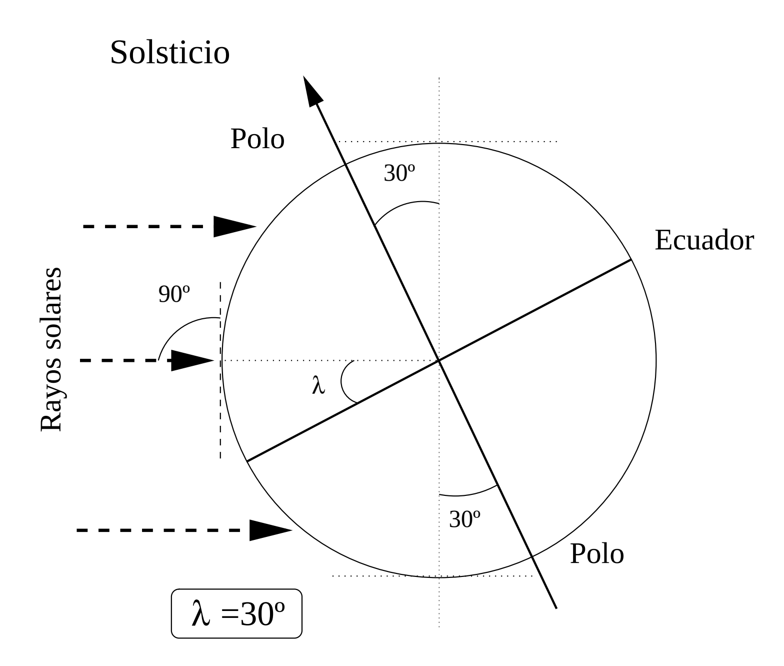
Al estar en equilibrio, la potencia absorbida por la Tierra es igual a la potencia emitida por la misma:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{abs} &= \mathrm{P}_{emi} \\
(1-a)\mathrm{S}'\,\pi\,\mathrm{R}_T^2 &= \sigma\,\mathrm{T}_e^4\,4\pi\,\mathrm{R}_T^2 \\
\mathrm{T}'_e &= \sqrt[4]{\frac{(1-a)\mathrm{S}'}{4\sigma}} \\
\mathrm{T}'_e &= \sqrt[4]{\frac{(1-0{,}3)1246\,\mathrm{W\,m^{-2}}}{5{,}67\,10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}\cdot 4}} \\
\mathrm{T}'_e &= 249\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

---

16. Suponga que el ángulo de inclinación del eje de rotación de la Tierra respecto al vector normal a la eclíptica pasa a ser de 30°. Indique las latitudes de los círculos polares y de los trópicos.

Solución:



A la vista de esta figura, donde se muestra la situación de la Tierra cuando se encuentra en la posición orbital correspondiente a un solsticio, resulta evidente que los trópicos se encuentran en la latitud 30°N (S) y los círculos polares en el ángulo complementario al anterior, es decir 60°N (S).

Capítulo 2

Termodinámica del aire no saturado

2.1. Fórmulas de interés

2.1.1. Ecuación del gas ideal

La mezcla de gases atmosféricos que denominamos *aire seco* más el vapor de agua contenido, que será descrito por un índice de humedad será muy razonablemente aproximado por un gas ideal,

$$P = \rho\, \overline{r}\, T \ , \tag{2.1}$$

donde

$$\overline{r} \ = \ r_s \left(1 + \frac{r_a - r_s}{r_s}\ q\right) \ \simeq r_s \left(1 + \frac{3}{5}\ q\right) \ , \tag{2.2}$$

siendo $r_s = R/M_s = 0{,}287 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\ K}}$, $r_a = R/M_a = 0{,}461 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\ K}}$, R la constante universal de los gases y M_s y M_a, respectivamente, las masas moleculares de la mezcla de aire seco (obtenida de las masas moleculares de sus componentes ponderadas por su concentración) y del agua. q es un índice de humedad característico denominado *humedad específica* y que se define como la proporción de masa de vapor de agua por unidad de masa de aire,

$$q = \frac{m_a}{m_a + m_s} = \frac{m}{m+1} \ , \tag{2.3}$$

donde m es la *proporción de mezcla* o proporción de masa de vapor de agua por unidad de masa de aire seco. Conocida la presión parcial de vapor de agua en el aire, e, también puede escribirse:

$$\frac{e}{P} = \frac{m}{\epsilon + m} \ , \qquad \epsilon = \frac{r_s}{r_a} \simeq \frac{5}{8} \ . \tag{2.4}$$

Es correcto emplear la aproximacíon $\frac{e}{P} \approx \frac{q}{\varepsilon} \approx \frac{m}{\varepsilon}$, aunque en la mayoría de los problemas se usará la relación exacta.

Usando la aproximación de gas ideal puede obtenerse también el calor específico a presión constante del aire atmosférico:

$$\overline{c}_p \ = \ c_p(s)\,(1 + k\ q) \ , \quad k = \frac{c_p(a)}{c_p(s)} - 1 = 0{,}86 \ . \tag{2.5}$$

Los calores específicos para agua y aire seco valen: $c_p(s) = 1{,}005 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\ K}}$, $c_p(a) = 1{,}86 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\ K}}$.

2.1.2. Ascenso adiabático de masas de aire

Dada una masa de aire que evoluciona verticalmente en el seno de la atmósfera, usando el **principio fundamental de la Hidrostática**,

$$dP = -\rho g dz \ , \tag{2.6}$$

para describir la variación de la presión, P, con la altura, z, e implementandolo en el **primer principio de la Termodinámica**, se tendrá:

$$\delta Q = dU + PdV = m\bar{c}_p dT - VdP = m\left(\bar{c}_p dT + \frac{T}{T'} g dz\right) \ , \tag{2.7}$$

donde m es la masa del aire de evoluciona verticalmente y donde, en todo momento a una altura z dada, se considera que dicha masa de aire se encuentra en equilibrio dinámico, es decir que su presión es igual a la presión atmosférica a esa altura z. Si, ahora, consideramos además que la evolución es *adiabática* (hipótesis de la *burbuja*), es decir $dQ = 0$, la variación de la Temperatura de esta masa de aire con la altura viene dada por

$$\overline{\Gamma}' = -\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{adiab}} = \overline{\Gamma}\frac{T}{T'} \ ; \tag{2.8}$$

donde el *coeficiente de enfriamiento por ascensión adiabática*, $\overline{\Gamma}$, resultará:

$$\overline{\Gamma} \ = \ \frac{g}{\bar{c}_p} \ = \frac{g}{c_p}\left(1+kq\right)^{-1} \ = \ \frac{\Gamma}{1+kq} \ . \tag{2.9}$$

El *coeficiente de enfriamiento por ascensión adiabática* para el aire seco ($q = 0$) vale: $\Gamma =$ 0,0098 °C/m.

Si suponemos que la temperatura atmosférica, T', varía *linealmente* con la altura,

$$T'(z) = T'_0 - \alpha z \ , \tag{2.10}$$

donde α es el llamado *gradiente vertical de temperatura* y donde, por simplicidad, hemos considerado la altura de referencia $z_0 = 0$ siendo $T'(z_0) = T'_0$; a partir de la variación de la temperatura de la masa de aire, T, con la altura dada por la ecuación (2.8), por integración, se obtendrá:

$$T(z) = T_0\left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0}\right)^{\overline{\Gamma}/\alpha} \simeq T_0\left(1 - \frac{\overline{\Gamma} z}{T'_0}\right) \tag{2.11}$$

2.1.3. Nivel de equilibrio

El *nivel de equilibrio*, z_e, se define como aquella altura a la que las temperaturas de la masa de aire que evoluciona adiabáticamente y de la atmósfera circundante se igualan:

$$T(z_e) = T'(z_e) = T_e \ . \tag{2.12}$$

Imponiendo esta ultima condición, de las ecuaciones (2.10,2.11), se tendrá:

$$z_e = \frac{T'_0}{\alpha}\left\{1 - \left(\frac{T_0}{T'_0}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \overline{\Gamma}}}\right\} \; ; \tag{2.13}$$

o, de manera aproximada,

$$z_e = \frac{T_0 - T'_0}{\frac{T_0}{T'_0}\overline{\Gamma} - \alpha} \; . \tag{2.14}$$

La temperatura de dicho nivel de equilibrio, T_e, se calculará como:

$$T_e = T'_0 - \alpha z_e \; , \tag{2.15}$$

a partir tanto del resultado exacto como del resultado aproximado.

2.1.4. Procesos politrópicos

Se denomina *proceso politrópico* a aquel en el que

$$dQ = mcdT \; , \tag{2.16}$$

donde c es el calor específico del proceso y debe ser una constante independiente de la temperatura. En estas condiciones, de nuevo, a partir del **primer principio de la termodinámica** y del **principio fundamental de la hidrostática** (ecuación (2.7)), obtendremos:

$$0 = (\bar{c}_p - c)\, dT + \frac{T}{T'} gdz \; . \tag{2.17}$$

Comparando esta ecuación con la del caso adiabático, inferiremos que todos los resultados para *procesos adiabáticos* son aplicables a *procesos politrópicos* sin mas que reemplazar:

$$c_p \to c_p - c \; , \tag{2.18}$$

y, si fuera necesario, el calor específico a volumen constante,

$$c_v \to c_v - c \; . \tag{2.19}$$

La ecuación que describe la evolución *adiabática* de un gas ideal es

$$P\ V^{\gamma} \; = \text{cte.} \; , \qquad \text{donde} : \gamma = \frac{c_p}{c_v} \; ; \tag{2.20}$$

para un *proceso politrópico* se reemplazará:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \to \gamma_p = \frac{c_p - c}{c_v - c} \; , \tag{2.21}$$

dándose a γ_p el nombre de *índice politrópico*.

2.1.5. Algunas definiciones útiles

Índice de estabilidad: Define la estabilidad de la estratificación atmosférica a partir de la comparación de la ecuación de un resorte con la del movimiento de una burbuja de aire en la atmósfera.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\eta \Delta z \; ; \qquad \eta = g\frac{\Gamma - \alpha}{T'} \; ; \tag{2.22}$$

Temperatura potencial: Se define como la temperatura que una masa de aire tendría tras evolucionar adiabáticamente hasta una presión de referencia, dicha presión de referencia es de 1000 hPa.

$$\theta = \left(\frac{1000}{P}\right)^{\overline{r}/\overline{c}_p} \tag{2.23}$$

Temperatura virtual: Se define como la temperatura que tendría una masa de aire humedo, a una cierta presión y temperatura, si todo su vapor de agua se condensara manteniéndose constante la presión y la densidad.

$$\overline{r}T \;=\; rT_v \quad \Rightarrow \quad T_v = T\left(1 + \frac{3}{5}q\right) \; . \tag{2.24}$$

2.2. Problemas resueltos

17. Calcúlese la variación de temperatura que experimentará 1 g de aire seco sometido a una presión de 1010 hPa y a una temperatura de 10°C cuando se le aportan 6 cal manteniendo constante la presión y a continuación la presión desciende en 40 hPa mediante un proceso adiabático.

Solución:

- En este caso, el aire seco sufre dos procesos: un proceso isobárico en el que se le aportan 6 cal y otro proceso adiabático (descendiendo la presión). Para calcular el ΔT_{total} necesitamos saber el ΔT en cada uno de los procesos.

(a) Proceso isobárico: ($\mathrm{P_1 = 1010\,hPa;\ T_1 = 283\,K}$)

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$\delta \mathrm{q} = \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} - \mathrm{v\,dP}$$

donde q es el calor por unidad de masa, $\mathrm{q} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{m}}$; c_p es el calor específico y v es el volumen específico.

- Como el proceso es a P = cte, vdP = 0, entonces nos queda que:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \mathrm{c}_p\,\Delta\mathrm{T} \\ \Delta\mathrm{T_1} &= \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}_p} \\ \Delta\mathrm{T_1} &= \frac{6\,\mathrm{cal}\cdot\,(4{,}18\,\mathrm{J/1\,cal})(1/\mathrm{g})}{1{,}005\,\mathrm{J/gK}} \\ \Delta\mathrm{T_1} &= 24{,}9\,\mathrm{K} \\ \text{Luego } \mathrm{T_2} &= 308{,}0\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

(b) Proceso adiabático: ($\mathrm{P_2 = 1010\,hPa;\ T_2 = 307{,}95\,K;\ P_3 = 970\,hPa}$)

- A continuación sufre un proceso adiabático, en el que la presión pasa de 1010hPa a 970 hPa. Teniendo en cuenta el ΔT anterior, calculamos $\mathrm{T_3}$ aplicando una de las ecuaciones de Poisson para los procesos adiabáticos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{T}_2^{\gamma}}{\mathrm{P}_2^{\gamma-1}} &= \frac{\mathrm{T}_3^{\gamma}}{\mathrm{P}_3^{\gamma-1}} \\ \text{donde } \gamma = \frac{\mathrm{c}_p}{\mathrm{c}_v} &= \frac{1{,}00529}{0{,}7183} = 1{,}4 \end{aligned}$$

- De esta manera, despejando $\mathrm{T_3}$ podemos ya calcular el $\Delta\mathrm{T}_{total}$:

$$
\begin{aligned}
T_3 &= T_2 \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
T_3 &= 307{,}95\,\text{K} \left(\frac{970\,\text{hPa}}{1010\,\text{hPa}}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} \\
T_3 &= 304{,}4\,\text{K}
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto, la variación total de temperatura será:

$$\Delta T_{total} = T_3 - T_1 = 304{,}4\,\text{K} - 283\,\text{K} = 21{,}4\ \text{K}$$

---

18. Calcúlese la variación de temperatura experimentada por 1 kg de aire seco cuando recibe 400 cal a volumen constante y a continuación pierde 220 cal a presión constante.

Dato: $c_p(as) = 1{,}0046$ J/gK.

Solución:

- El aire seco sufre dos procesos: uno isócoro en el que recibe 400 cal y otro isóbaro en el que pierde 220 cal.

(a)Proceso isócoro

$$q = \frac{400\,\text{cal}}{\text{kg}} \cdot \frac{4,18\,\text{J}}{1\,\text{cal}} \cdot \frac{1\,\text{kg}}{10^3\,\text{g}} = 1{,}672\,\text{J/g}$$

q es positivo y por tanto es calor que entra en el sistema

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$\delta q = c_v\, dT + P\, dv$$

- Al ser un proceso isócoro, dv = 0, por lo que nos queda que:

$$
\begin{aligned}
q &= c_v\, \Delta T \\
\Delta T_1 &= \frac{q}{c_v} \\
\Delta T_1 &= \frac{1{,}672\,\text{J/g}}{0{,}718\,\text{J/gK}} = 2{,}33\,\text{K}
\end{aligned}
$$

(b)Proceso isóbaro:

$$q = \frac{-\,220\,\text{cal}}{\text{kg}} \cdot \frac{4{,}18\,\text{J}}{1\,\text{cal}} \cdot \frac{1\,\text{kg}}{10^3\,\text{g}} = -\,0{,}92\,\text{J/g}$$

q es negativo y por tanto es calor que sale del sistema.

- Volvemos a aplicar el primer principio de la termodinámica:

$$\delta\,\mathrm{q} = \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} - \mathrm{v}\,\mathrm{dP}$$

- Al ser un proceso isóbaro, dP = 0, por lo que nos quedaría:

$$\begin{aligned}
\mathrm{q} &= \mathrm{c}_p \Delta\,\mathrm{T} \\
\Delta\mathrm{T}_2 &= \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}_p} \\
\Delta\mathrm{T}_2 &= \frac{-\,0{,}92\,\mathrm{J/g}}{1{,}005\,\mathrm{J/gK}} \\
\Delta\mathrm{T}_2 &= -\,0,91\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

- El $\Delta\mathrm{T}_{total}$ será:

$$\Delta\mathrm{T}_{total} = 2{,}33\,\mathrm{K} + (-\,0{,}91\,\mathrm{K}) = 1{,}42\,\mathrm{K}$$

---

19. Determínese el calor que sería necesario aplicar a una burbuja de aire seco de 1 kg de masa si su temperatura disminuye 25° C debido a un ascenso de 3,5 km. Calcúlese el trabajo de expansión que acompaña a este proceso. Suponer $T/T' \approx 1$.

Solución:

(a) Para calcular q:

- En primer lugar calculamos el índice de enfriamiento (Γ). Nótese que el proceso no es el adiabático.

$$\begin{aligned}
\Gamma_p &= -\left(\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}}\right) \simeq -\frac{(-\,25\,^\circ\mathrm{C}\,)}{3{,}5\,10^3\,\mathrm{m}} \\
\Gamma_p &= 7{,}14\,10^{-3}\,^\circ\mathrm{C}\,/\mathrm{m}
\end{aligned}$$

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$\delta\mathrm{q} = \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz}$$

y dividimos por dz:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\,\mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= -\,\mathrm{c}_p\,\Gamma_p + \mathrm{g} = \mathrm{c}_p\,(\Gamma - \Gamma_p) \\
\frac{\delta\,\mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= 1005\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}} \cdot (9{,}75\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} - 7{,}14\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}) \\
\frac{\delta\,\mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= 2{,}63\,\mathrm{J/kg\,m}
\end{aligned}$$

- Para el ascenso de $3{,}5\,10^3$ m necesitará:

$$Q_T = \frac{2{,}63\,\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,m}} \cdot 3{,}5\,10^3\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{kg} = 9185\,\mathrm{J}.$$

(b) Para calcular el trabajo (W):

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{Q} &= \mathrm{m\,c}_v\,\mathrm{dT} + \delta\,\mathrm{W}\,. \\ \mathrm{W} &\approx \mathrm{Q}_T - \mathrm{m\,c}_v \Delta \mathrm{T}\,. \\ \mathrm{W} &= 9185\,\mathrm{J} - 718 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}(-\,25\,\mathrm{K})\,1\,\mathrm{kg} = 27135\,\mathrm{J}\,. \end{aligned}$$

---

20. Con el objeto de elevar un globo meteorológico, se calienta el aire en su interior por medio de un soplete, mientras está amarrado a tierra, hasta comunicarle 54,5 kcal.

Datos: $\mathrm{m_b}$=5 kg, $c_p = 0{,}24$ cal/(g °C)

(a) ¿Cuál será la temperatura de la masa de aire en el interior del globo cuando se apaga el soplete, sabiendo que el aire estaba inicialmente a 25°C?

(b) Suponiendo las paredes del globo ideales para aproximar la masa de aire en su interior como una burbuja, y sabiendo que la temperatura en tierra es de 25°C y que al paso por los 750 m sobre el nivel del suelo se han registrado 19,75°C, ¿a qué altura alcanzará el globo el equilibrio y detendrá su ascensión ?

(c) Si el soplete calienta a un ritmo de 0,5 kcal/min, ¿cuanto tiempo tenemos que tener encendido el soplete para que el globo alcance los 2000 m?

Solución:

(a) Temperatura de la masa de aire al apagar el soplete:

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica en el instante inicial, cuando el globo está en el suelo ($z = 0$):

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \mathrm{c}_p\,\Delta \mathrm{T} \\ \Delta \mathrm{T} &= \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}_p} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{c}_p &= 0{,}24 \cdot \frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}} = 1003{,}2\,\mathrm{J/(kg\,K)} \\ \mathrm{q} &= 54{,}5\,\mathrm{kcal} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{cal}}{1\,\mathrm{kcal}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} = 227810\,\mathrm{J} \rightarrow \text{para los 5 kg} \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos ΔT:

$$\Delta T = \frac{q}{c_p}$$
$$\Delta T = \frac{227810\,J/5\,kg}{1003{,}2\,J/(kg\,K)}$$
$$\Delta T = 45{,}4\,K$$

- La temperatura final después de calentarlo con el soplete será:

$$T_{final} = 298\,K + 45{,}4\,K = 343{,}4\,K$$

(b) Cálculo de la altura de equilibrio (z_{eq}):

- Sabemos que $T'_0 = 298$ K y que en z = 750 m $T' = 292{,}75$ K, por tanto podemos calcular α:

$$T' = T'_0 - \alpha\, z$$
$$\alpha = \frac{T'_0 - T'}{z}$$
$$\alpha = \frac{298\,K - 292{,}75\,K}{750\,m}$$
$$\alpha = 7\,10^{-3}\,K/m$$

- Para obtener z_{eq} partimos de que en el equilibrio, $T' = T$, y tenemos en cuenta que consideraremos el proceso adiabático, por tanto:

$$T' = T'_0 - \alpha\, z_{eq}$$
$$T = T_0 - \frac{T_0}{T'_0}\,\Gamma\, z_{eq}$$

- Si igualamos y despejamos z_{eq} nos quedaría que:

$$T'_0 - \alpha\, z_{eq} = T_0 - \frac{T_0}{T'_0}\,\Gamma\, z_{eq}$$
$$z_{eq} = \frac{T'_0 - T_0}{\alpha - (T_0/T'_0)\,\Gamma}$$

- Teniendo en cuenta que $\Gamma = 9{,}75\,10^{-3}$ K/m, ya podemos sustituir en z_{eq}:

$$z_{eq} = \frac{298\,K - 343{,}3\,K}{0{,}007\,K/m - (343{,}3\,K/298\,K)\cdot 9{,}75\,10^{-3}\,K/m}$$
$$z_{eq} \approx 11000\,m$$

(c) Cálculo del tiempo que hay que mantener el soplete encendido:

- Calculamos en primer lugar la temperatura que tiene que tener el globo en el suelo para que llegue a 2000 m, $\mathrm{T_0}$, despejándola de la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z} &= \frac{\mathrm{T_0'} - \mathrm{T_0}}{\alpha - (\mathrm{T_0}/\mathrm{T_0'})\,\Gamma} \\
\mathrm{T_0} &= \frac{\alpha\,\mathrm{z} - \mathrm{T_0'}}{(\Gamma\,\mathrm{z}/\mathrm{T_0'}) - 1} \\
\mathrm{T_0} &= \frac{0{,}007\,\mathrm{K/m}\cdot 2000\,\mathrm{m} - 298\,\mathrm{K}}{((9{,}75\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}\cdot 2000\,\mathrm{m})/298\,\mathrm{K}) - 1} = 304\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

- A continuación calculamos el calor necesario para que llegue a 304 K cuando el globo está en el suelo. Para ello aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$
\begin{aligned}
\delta\,\mathrm{q} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} \\
\delta\,\mathrm{q} &= 1005\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}(304\,\mathrm{K} - 298\,\mathrm{K}) \\
\delta\,\mathrm{q} &= 6030\ \mathrm{J/kg}
\end{aligned}
$$

- Al tratarse de 5 kg

$$
\mathrm{q}_T = 6030\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\cdot 5\,\mathrm{kg} = 30150\,\mathrm{J}
$$

- El tiempo estimado será:

$$
\mathrm{t} = 30150\,\mathrm{J}\cdot\frac{1\,\mathrm{cal}}{4{,}18\,\mathrm{J}}\cdot\frac{1\,\mathrm{kcal}}{10^3\,\mathrm{cal}}\cdot\frac{1\,\mathrm{min}}{0{,}5\,\mathrm{kcal}} = 14,4\,\mathrm{min}
$$

---

21. Una burbuja de aire seco con gran contenido en partículas de polvo absorbe por radiación 50 cal/kg por cada 100 m de ascenso. Determínese la variación de temperatura experimentada por la burbuja tras un ascenso de 1000 m. Suponer $T/T' \approx 1$.

Solución:

Dadas las condiciones del problema se trata de un proceso politrópico.

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$
\delta\,\mathrm{q} = \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz}
$$

- A continuación dividimos entre dz y despejamos dT/dz:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\,\mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= \mathrm{c}_p\,\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} + \mathrm{g}\,\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dz}} \\
\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} &= \frac{\delta\,\mathrm{q}/\mathrm{dz} - \mathrm{g}}{\mathrm{c}_p}
\end{aligned}
$$

donde:

$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = \frac{50\,\mathrm{cal}}{\mathrm{kg}\,100\,\mathrm{m}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} = 2{,}09\,\mathrm{J/(kg\,m)}$$

- Sustituyendo, nos queda que ΔT sería igual a:

$$\Delta \mathrm{T} = \frac{\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} - \mathrm{g}}{\mathrm{c}_p}\Delta z$$

$$\Delta \mathrm{T} = = \frac{2{,}09\,\mathrm{J/(kg\,m)} - 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot 1000\,\mathrm{m}$$

$$\Delta \mathrm{T} = -7{,}7\,\mathrm{K}$$

---

22. Una burbuja de aire seco con gran contenido en partículas de polvo absorbe gran cantidad de radiación a un ritmo constante de 100 cal/kg cada 100 m. Si suponemos que la burbuja asciende en una situación de permanente equilibrio, es decir con $T_{\mathrm{b}}(z)/T_{\mathrm{at}}(z) \simeq 1$:

(a) ¿Cuál será el descenso de temperatura cuando el ascenso de la burbuja sea de 1000 m?

(b) Demostrar que el proceso es politrópico y calcular el calor específico por unidad de masa del proceso y el índice politrópico.

(c) La ascensión de la burbuja, bajo las anteriores condiciones, se produce a velocidad constante, ¿por qué?. Si la burbuja tiene una masa de 5100 kg y podemos suponer que la energía recibida por radiación proviene del Sol, determinar cuál sería el flujo de energía (energía total por unidad de tiempo) recibido desde el Sol, tomado como un cuerpo negro de $T = 6000$ K, y considerando la burbuja esférica de radio $r_b = 10$ m como un cuerpo con emisividad $\epsilon = 0{,}7$. ¿Cuál será la velocidad de ascensión de la burbuja? (suponed que la burbuja se encuentra a la misma distancia del Sol que la propia Tierra, datos: $R_S = 7{,}10^5$ Km, $R_{T-S} = 1{,}5 \cdot 10^8$ Km, $\sigma_0 = 8{,}16 \cdot 10^{-11}$ Langley /(min·K^4))

Solución:

Dadas las condiciones del problema se trata de un proceso politrópico.

(a) Cálculo del descenso de temperatura (ΔT)

- En primer lugar calculamos Γ_p aplicando el primer principio de la termodinámica:

$$\delta \mathrm{q} = \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz}$$

$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{c}_p\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} + \mathrm{g}$$

$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = -\mathrm{c}_p\,\Gamma_p + \mathrm{g}$$

$$\Gamma_p = \frac{\mathrm{g} - \delta\,\mathrm{q/dz}}{\mathrm{c}_p}$$

$$\Gamma_p = \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2} - 4{,}18\,\mathrm{J/kg\,m}}{1005\,\mathrm{J/kg\,K}}$$

$$\Gamma_p = 5{,}6\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$$

- Por tanto, para un ascenso de 1000 m, el ΔT será:

$$\begin{aligned}\Gamma_p &= -\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}}\\ \Delta \mathrm{T} &= -\Gamma_p\,\Delta \mathrm{z}\\ \Delta \mathrm{T} &= -5{,}6\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}\cdot 1000\,\mathrm{m}\\ \Delta \mathrm{T} &= -5{,}6\,\mathrm{K}\end{aligned}$$

(b) Demostración de que el proceso es politrópico. Cálculo del calor específico y del índice politrópico.

(b.1) Esta cuestión es trivial de demostrar ya que al ser δq/dz = cte (asumiendo $\mathrm{T_0/T_0'} \approx 1$), supone dT/dz = $-\Gamma_p$ = cte. Por tanto, volviendo al primer principio:

$$\delta\,\mathrm{q} = \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dT}}\,\mathrm{dT} = \mathrm{c}_p\,(1 - \Gamma/\Gamma_p)\mathrm{dT}$$

siendo

$$c = c_p\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_p}\right)$$

(b.2) Para calcular el calor específico del proceso (c) aplicamos el primer principio de la termodinámica para un proceso politrópico, obteniendo dicha expresión para el mismo:

$$\begin{aligned}\mathrm{c} &= \mathrm{c}_p - \frac{\mathrm{g}}{\Gamma_p} = \mathrm{c}_p\,(1 - \Gamma/\Gamma_p)\\ \mathrm{c} &= 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}\left(1 - \frac{9{,}75\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}}{5{,}6\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}}\right)\\ \mathrm{c} &= -745\,\mathrm{J/(kg\,K)}\end{aligned}$$

Como se ve es negativo ya que se ha absorbido calor en el proceso.

(b.3) Para calcular el índice politrópico (γ_p) utilizamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\gamma_p &= \frac{\mathrm{c} - \mathrm{c}_p}{\mathrm{c} - \mathrm{c}_v}\\ \gamma_p &= \frac{-745\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{-745\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 718\,\mathrm{J/(kg\,K)}}\\ \gamma_p &= 1{,}2\end{aligned}$$

(c) Demostración de la velocidad de ascensión constante. Cálculo de la potencia absorbida (P) y de la velocidad (v).

(c.1) Para saber por qué v es constante aplicamos en primer lugar el principio de la termodinámica y dividimos entre dt:

$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{c}_p \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{g} \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{c}_p (-\Gamma_p + \Gamma) \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}$$

- Por otro lado, para un proceso politrópico (dividiendo también por dt) tenemos que:

$$\frac{\delta \, \mathrm{q}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{c} \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$$

Teniendo en cuenta que en un proceso de absorción la energía se absorbe a ritmo constante, $\delta q/dt$ = cte. Si $\delta q/dt$, Γ y Γ_p son constantes, forzosamente la velocidad de ascenso de la burbuja, dz/dt es necesariamente constante.

(c.2) Para calcular la potencia absorbida atendemos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \frac{\sigma \, \mathrm{T}_s^4 \, 4\pi \, \mathrm{R}_s^2}{4\pi \, \mathrm{D}^2} \pi \, \mathrm{R}_b^2 \, \varepsilon \\
\mathrm{P} &= \frac{5{,}67 \, 10^{-8} \, \mathrm{W/m^{-2} \, K^{-4}} \cdot 6000^4 \, \mathrm{K}^4 \cdot (7 \, 10^8 \, \mathrm{m})^2}{(1{,}5 \, 10^{11} \, \mathrm{m})^2} \cdot \pi \cdot 10 \, \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}7 \\
\mathrm{P} &= 3{,}5 \, 10^5 \, \mathrm{W}
\end{aligned}$$

(c.3) Para calcular la velocidad de ascensión (v) aplicamos el primer principio de la termodinámica y dividimos en primer lugar por dz (para obtenerlo en funcion de Γ) y posteriormente por dt (para así obtener la expresión de la velocidad):

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{q} &= \mathrm{c}_p \, \mathrm{dT} + \mathrm{g} \, \mathrm{dz} \\
\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= -\, \mathrm{c}_p \, \Gamma_p + \mathrm{g} \\
\delta \mathrm{q} &= (-\, \mathrm{c}_p \, \Gamma_p + \mathrm{g}) \, \mathrm{dz} \\
\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dt}} &= (-\, \mathrm{c}_p \, \Gamma_p + \mathrm{g}) \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{c}_p (-\Gamma_p + \Gamma) \, \mathrm{v} \\
\mathrm{v} &= \frac{\delta \mathrm{q}/\mathrm{dt}}{-\, \mathrm{c}_p \, \Gamma_p + \mathrm{g}} \\
\mathrm{v} &= \frac{3{,}5 \, 10^5 \, \mathrm{J}/5100 \, \mathrm{kg \, s}}{-\, 1005 \, \mathrm{J/(kg \, K)} \cdot 5{,}6 \, 10^{-3} \, \mathrm{K/m} + 9{,}8 \, \mathrm{m/s^2}} \\
\mathrm{v} &= 16{,}4 \, \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

---

23. Demuéstrese que si una burbuja de aire seco de masa m asciende adiabática y reversiblemente su trabajo de expansión puede ser calculado mediante la ecuación:

$$\delta W = \frac{g}{x} \frac{T}{T'} dz,$$

siendo x el índice adiabático ($x = c_p/c_v$). Encontrar una expresión análoga para el caso de una evolución politrópica.

(a) Expresión para un ascenso adiabático:

- Partimos de la siguiente expresión, $Pv = rT$, donde v es el volumen específico y $r = R/M$, siendo R la constante de la ley de los gases ideales y M la masa molecular del aire. Si derivamos la misma, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}dv + v\,\mathrm{dP} &= \mathrm{rdT} \\ \mathrm{P}dv &= \mathrm{rdT} - v\,\mathrm{dP} \\ \mathrm{dW} &= \mathrm{rdT} - v\,\mathrm{dP} \end{aligned}$$

- Aplicamos a continuación el principio fundamental de la hidrostática $\mathrm{dP} = -\rho'\,\mathrm{gdz}$, con lo que el trabajo nos queda:

$$\begin{aligned} \mathrm{dW} &= \mathrm{rdT} + v\,\rho'\mathrm{gdz} \\ \mathrm{dW} &= \mathrm{rdT} + \frac{\rho'}{\rho}\,\mathrm{gdz} \\ \mathrm{dW} &= \mathrm{rdT} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\,\mathrm{gdz} \end{aligned}$$

- A continuación, aplicamos el primer principio de la termodinámica para un proceso adiabático ($\delta Q = 0$), donde despejamos dT y sustituimos en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\mathrm{g\,dz} \\ \mathrm{dT} &= \frac{(\mathrm{T}/\mathrm{T}')\mathrm{gdz}}{\mathrm{c}_p} \\ \mathrm{dW} &= r\left(- \frac{(\mathrm{T}/\mathrm{T}')\,\mathrm{gdz}}{\mathrm{c}_p}\right) + \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\,\mathrm{gdz} \\ \mathrm{dW} &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\,\mathrm{gdz}\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{c}_p} - 1\right) \\ \mathrm{dW} &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\,\mathrm{gdz}\left(\frac{\mathrm{c}_p - \mathrm{c}_v}{\mathrm{c}_p} - 1\right) \\ \mathrm{dW} &= -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\,\mathrm{gdz}\left(- \frac{1}{\mathrm{x}}\right) \\ \mathrm{dW} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{x}}\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}\,\mathrm{dz} \end{aligned}$$

(b) Expresión para un proceso politrópico:

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica para un proceso politrópico ($\delta \mathrm{q} = \mathrm{c\,dT}$), donde despejamos dT y sustituimos en la expresión anterior:

$$
\begin{aligned}
c\,dT &= c_p\,dT + \frac{T}{T'}g\,dz \\
dT &= -\frac{(T/T')gdz}{c_p - c} \\
dW &= r\left(-\frac{(T/T')\,gdz}{c_p - c}\right) + \frac{T}{T'}\,gdz \\
dW &= -\frac{T}{T'}\,gdz\left(\frac{r}{c_p - c} - 1\right) \\
dW &= -\frac{T}{T'}\,gdz\left(\frac{c_p - c_v}{c_p - c} - 1\right) \\
dW &= -\frac{T}{T'}\,gdz\left(-\frac{1}{x_p}\right) \\
dW &= \frac{g}{x_p}\,\frac{T}{T'}\,dz
\end{aligned}
$$

---

24. Una burbuja de aire seco con una temperatura de 15°C y una presión de 1010 hPa asciende adiabáticamente hasta un nivel donde la presión es de 700 hPa. Determínese la temperatura de la burbuja en el nivel superior.

Solución:

- Calculamos T_2 aplicando la ecuación de la adiabática (Poisson):

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{\gamma}}{T_2^{\gamma}} &= \frac{P_1^{\gamma-1}}{P_2^{\gamma-1}} \\
T_2 &= T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
T_2 &= 288\,\mathrm{K}\left(\frac{700\,\mathrm{hPa}}{1010\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} \\
T_2 &= 259{,}4\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

---

25. Determínese la variación de temperatura de una burbuja de aire seco que asciende mediante un proceso politrópico en el cual la densidad de la burbuja no varía. Suponer $\rho = \rho'$.

Solución:

- Por un lado, sabemos que $\delta q = c_p\,dT + g\,dz$, donde hemos usado que $\rho = \rho'$ y $T = T'$. Además, al ser un proceso politrópico, también sabemos que $\delta\,q = c\,dT$. Igualando ambas expresiones nos queda lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
c\,dT &= c_p\,dT + g\,dz \\
0 &= dT(c_p - c) + g\,dz \\
dT &= -\frac{g\,dz}{c_p - c} \\
\frac{dT}{dz} &= -\frac{g}{c_p - c}
\end{aligned}
$$

- En este caso podemos calcular fácilmente cúanto vale c:

$$\mathrm{P} \;=\; \rho\,\mathrm{r}\,\mathrm{T} \text{ ya que } \rho = \text{cte} \rightarrow\; \mathrm{dP} \;=\; \rho\,\mathrm{r}\,\mathrm{dT}$$

También sabemos que $\mathrm{dP} \;=\; -\,\rho'\,\mathrm{g}\,\mathrm{dz}$. Al ser $\rho = \rho'$obtenemos que $\mathrm{r}\,\mathrm{dT} \;=\; -\,\mathrm{g}\,\mathrm{dz}$. Así pues, $\mathrm{dT/dz} \;=\; -\,\mathrm{g/r}$

Comparando esta expresión con la obtenida en un principio:

$$\mathrm{c}_p \;-\; \mathrm{c} \;=\; \mathrm{r} \rightarrow \quad \mathrm{c} \;=\; \mathrm{c}_v$$

---

26. Sabiendo que el gradiente de una evolución politrópica (Γ_p) es igual a 0,5°C por cada 100 m de ascenso, determínese el calor específico de la evolución.

   Solución:

   - Aplicamos el primer principio para un proceso politrópico:

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}\,\mathrm{dT} \;&=\; \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} \;+\; \mathrm{g}\,\mathrm{dz} \\
0 \;&=\; \mathrm{dT}(\mathrm{c}_p \;-\; \mathrm{c}) \;+\; \mathrm{g}\,\mathrm{dz} \\
\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} \;&=\; -\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p \;-\; \mathrm{c}} \rightarrow \Gamma_p \;=\; \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p \;-\; \mathrm{c}} \;=\; \frac{\Gamma}{1 \;-\; \mathrm{c}/\mathrm{c}_p}
\end{aligned}$$

   - Despejando c y sustituyendo los datos conocidos, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{c} \;&=\; \frac{\mathrm{dT}\,\mathrm{c}_p \;+\; \mathrm{dz}\,\mathrm{g}}{\mathrm{dT}} \\
\mathrm{c} \;&=\; \frac{0{,}5\,\mathrm{K}\cdot\;1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} \;-\; 100\,\mathrm{m}\cdot\;9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}5\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{c} \;&=\; -\,955\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

---

27. Determínese el calor específico de una evolución politrópica sabiendo que se verifica la siguiente ecuación: $PV^3 = \text{cte}$.

   Solución:

   - Al tratarse de una evolución politrópica, donde $\mathrm{P}\,\mathrm{V}^3 \;=\; \text{cte}$, significa que $\gamma \;=\; 3$. Por otro lado, sabemos que:

$$\gamma \;=\; \frac{\mathrm{c} \;-\; \mathrm{c}_p}{\mathrm{c} \;-\; \mathrm{c}_v}$$

   - Despejamos c y sustituyendo los datos conocidos, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\gamma\, c - \gamma\, c_v &= c - c_p \\
\gamma\, c - c &= \gamma\, c_v - c_p \\
c &= \frac{\gamma\, c_v - c_p}{\gamma - 1} \\
c &= \frac{3 \cdot 718\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{3 - 1} \\
c &= 574\,\mathrm{J/kg\,K}
\end{aligned}
$$

---

28. Una burbuja de aire seco asciende mediante una evolución politrópica. Si la temperatura de la burbuja disminuye 0,7°C por cada 100 m de ascenso, determínense el exponente politrópico, la variación de calor con la altura y el calor específico asociados al proceso.

Solución:

(a) Cálculo del calor específico (c):

- En primer lugar obtenemos Γ :

$$
\Gamma_p = -\frac{dT}{dz} = -\frac{(-0{,}7)\,\mathrm{K}}{100\,\mathrm{m}} = 0{,}007\,\mathrm{K/m}
$$

- A continuación aplicamos el primer principio de la termodinámica para un proceso politrópico:

$$
\begin{aligned}
\delta q &= c_p\, dT + g\, dz \\
c\, dT &= c_p\, dT + g\, dz \\
(c - c_p)\, dT &= g\, dz \\
\frac{dT}{dz} &= \frac{g}{c - c_p} \\
\Gamma_p &= -\frac{g}{c - c_p} \\
c &= -\frac{g}{\Gamma_p} + c_p \\
c &= -\frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}007\,\mathrm{K/m}} + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} \\
c &= -395{,}4\,\mathrm{J/kg\,K}
\end{aligned}
$$

(b) Cálculo del exponente politrópico (γ):

- Aplicando la definición del coeficiente politrópico, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\gamma_p &= \frac{c - c_p}{c - c_v} \\
\gamma_p &= \frac{-395{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{-395{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 718{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \\
\gamma_p &= 1{,}26
\end{aligned}
$$

(c) Cálculo de la variación de calor con la altura (δq/dz):

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica para un proceso politrópico:

$$\delta \mathrm{q} = \mathrm{c\,dT}$$

dividimos entre dz:

$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = -\,\mathrm{c}\,\Gamma_p$$
$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = -\,395{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot (-\,0{,}007)\mathrm{K/m}$$
$$\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = 2{,}8\,\mathrm{J/(kg\,m)}$$

---

29. Un masa de aire seco tiene una temperatura de 5°C en el nivel de 1010 hPa y asciende siguiendo una ley politrópica de calor específico negativo igual a c = −0,07 cal/(g K). Calcúlese la temperatura que tendrá la masa de aire al llegar al nivel 850 hPa.

Solución:

- En primer lugar expresamos el calor específico en unidades del S.I:

$$\mathrm{c} = \frac{-\,0{,}07\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}} = -\,292{,}6\,\mathrm{J/(kg\,K)}$$

- A continuación calculamos el exponente politrópico (γ_p):

$$\gamma_p = \frac{\mathrm{c} - \mathrm{c}_p}{\mathrm{c} - \mathrm{c}_v}$$
$$\gamma_p = \frac{-\,292{,}6\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{-\,292{,}6\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 718{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)}}$$
$$\gamma_p = 1{,}28$$

- A continuación, utilizamos la fórmula de Poisson para un proceso politrópico, donde $\mathrm{T}_1 = 278\,\mathrm{K}$, $\mathrm{P}_1 = 1010\,\mathrm{hPa}$ y $\mathrm{P}_2 = 850\,\mathrm{hPa}$:

$$\frac{T_1^{\gamma}}{T_2^{\gamma}} = \frac{P_1^{\gamma-1}}{P_2^{\gamma-1}}$$
$$\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1 \left(\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$
$$\mathrm{T}_2 = 278\,\mathrm{K} \left(\frac{850\,\mathrm{hPa}}{1010\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,28-1}{1,28}}$$
$$T_2 = 268\,\mathrm{K}$$

---

30. Los datos de un radiosondeo arrojan los siguientes valores de presión y temperatura:

P (hPa)	1022	987	810	740	578
T (°C)	17	10	4	0	-12

Calcúlese las temperaturas potenciales para cada punto y determinar las condiciones de estabilidad de la atmósfera.

Solución:

- La Temperatura potencial viene dada por la siguiente expresión:

$$\theta = \mathrm{T}\left(\frac{1000}{\mathrm{P}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

(a) Caso a: $\mathrm{T}_a = 17^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ y $\mathrm{P}_a = 1022\,\mathrm{hPa}$

$$\begin{aligned}
\theta_a &= \mathrm{T}_a\left(\frac{1000}{\mathrm{P}_a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
\theta_a &= 290\,\mathrm{K}\left(\frac{1000\,\mathrm{hPa}}{1022\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\
\theta_a &= 288{,}2\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(b) Caso b: $\mathrm{T}_b = 10^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ y $\mathrm{P}_b = 987\,\mathrm{hPa}$

$$\begin{aligned}
\theta_b &= \mathrm{T}_b\left(\frac{1000}{\mathrm{P}_b}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
\theta_b &= 283\,\mathrm{K}\left(\frac{1000\,\mathrm{hPa}}{987\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\
\theta_b &= 284{,}1\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(c) Caso c: $\mathrm{T}_c = 4^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ y $\mathrm{P}_c = 810\,\mathrm{hPa}$

$$\begin{aligned}
\theta_c &= \mathrm{T}_c\left(\frac{1000}{\mathrm{P}_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
\theta_c &= 277\,\mathrm{K}\left(\frac{1000\,\mathrm{hPa}}{810\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\
\theta_c &= 294{,}2\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(d) Caso d: $\mathrm{T}_d = 0^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ y $\mathrm{P}_d = 740\,\mathrm{hPa}$

$$\begin{aligned}\theta_d &= \mathrm{T}_d\left(\frac{1000}{\mathrm{P}_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\ \theta_d &= 273\,\mathrm{K}\left(\frac{1000\,\mathrm{hPa}}{740\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}\\ \theta_d &= 297{,}6\,\mathrm{K}\end{aligned}$$

(e) Caso e: $T_d = -12^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$ y $P_d = 578\,\mathrm{hPa}$

$$\begin{aligned}\theta_e &= \mathrm{T}_e\left(\frac{1000}{\mathrm{P}_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\ \theta_e &= 261\,\mathrm{K}\left(\frac{1000\,\mathrm{hPa}}{578\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}\\ \theta_e &= 305{,}3\,\mathrm{K}\end{aligned}$$

- Para que el estado de la atmósfera sea estable, las temperaturas potenciales deben ir aumentando de un punto a otro, ya que las presiones son cada vez menores. Esto se cumple salvo entre los dos primeros puntos. por lo tanto, es inestable sólo entre los puntos a y b; siendo el resto estable.

---

31. Dada una atmósfera con un gradiente vertical de temperatura $\alpha = 0{,}65^\circ$ C/100 m, determínese el calor que debería absorber una masa de aire seco en ascenso para que se encontrara a igual temperatura que el aire atmosférico en todos los niveles.

Solución:

- Para que la temperatura de la masa de aire seco en ascenso sea igual a la temperatura del aire atmosférico en todos los niveles, es condición necesaria que $\alpha = \Gamma = 6{,}5\ 10^{-3}\ {}^{\mathrm{o}}\mathrm{C/m}$. Así pues, aplicando el primer principio de la termodinámica:

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{q} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz}\\ \frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= -\,\mathrm{c}_p\Gamma + \mathrm{g}\end{aligned}$$

- Como $\Gamma = \alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= -\,\mathrm{c}_p\,\alpha + \mathrm{g}\\ \frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= -\,1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 6{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K/m} + 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\\ \frac{\delta \mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= 3{,}3\,\mathrm{J/(kg\,m)}\end{aligned}$$

---

32. Una masa de aire seco asciende verticalmente según una ley politrópica de exponente γ_p en una atmósfera de gradiente térmico vertical $\alpha = 1{,}1°\mathrm{C}/100$ m. Determine la estabilidad de estratificación de la atmósfera para,

    (a) $\gamma_p = 1{,}5$,

    (b) $\gamma_p = 1{,}4$.

    Solución:

    - Aplicamos el primer principio de la termodinámica a un proceso politrópico para obtener la expresión de Γ:

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{q} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g\,dz} \\
\mathrm{c\,dT} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g\,dz} \\
0 &= (\mathrm{c}_p - \mathrm{c})\mathrm{dT} + \mathrm{g\,dz} \\
-\mathrm{g\,dz} &= (\mathrm{c}_p - \mathrm{c})\mathrm{dT} \\
\Gamma_p &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p - \mathrm{c}}
\end{aligned}$$

(a) Para el caso de $\gamma_p = 1{,}5$

- Calculamos el calor específico (c):

$$\begin{aligned}
\gamma_p &= \frac{\mathrm{c} - \mathrm{c}_p}{\mathrm{c} - \mathrm{c}_v} \\
\mathrm{c} &= \frac{\gamma_p\,\mathrm{c}_v - \mathrm{c}_p}{\gamma_p - 1} \\
\mathrm{c} &= \frac{1{,}5 \cdot 718\,\mathrm{J/(kg\,m)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,m)}}{1{,}5 - 1} \\
\mathrm{c} &= 144\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

- Sustituimos en Γ_p y comparamos posteriormente dicho valor con α:

$$\begin{aligned}
\Gamma_p &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,m)} - 144\,\mathrm{J/(kg\,m)}} \\
\Gamma_p &= 0{,}014\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Como $\Gamma_p = 0{,}014\,\mathrm{K/m}$ y $\alpha = 0{,}011\,\mathrm{K/m}$, es decir, $\Gamma > \alpha$, la atmósfera se encuentra en condiciones de estabilidad.

(b) Para el caso de $\gamma_p = 1{,}4$

- Calculamos el calor específico aplicando la expresión anterior:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c} &= \frac{\gamma_p\,\mathrm{c}_v\,-\,\mathrm{c}_p}{\gamma_p\,-\,1}\\
\mathrm{c} &= \frac{1{,}4\cdot 718\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,-\,1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{1{,}4\,-\,1}\\
\mathrm{c} &= 0{,}5\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}
$$

- Sustituimos en Γ_p y comparamos con α:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_p &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,-\,0{,}5\,\mathrm{J/(kg\,K)}}\\
\Gamma_p &= 9{,}76\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}
$$

- En este caso, $\Gamma_p = 9{,}76\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$ y $\alpha = 0{,}011\,\mathrm{K/m}$, es decir, $\alpha > \Gamma$; por lo tanto la atmósfera está en condiciones de inestabilidad.

---

33. Una masa de aire seco desciende en la atmósfera recibiendo una energía por radiación de 0,08 cal/g cada 100 m. Sabiendo que el gradiente térmico de la atmósfera es igual a α = 0,9°C/ 100 m, determínense el grado de estabilidad de la atmósfera, el exponente politrópico y el calor específico politrópico. Suponer que $T/T' \approx 1$.

Solución:

(a) Determinamos primero el grado de estabilidad de la atmósfera:

- Conversión de $\delta\mathrm{q}/\mathrm{dz}$ a unidades del S.I.

$$
\frac{\delta\mathrm{q}}{\mathrm{dz}} = \frac{0{,}08\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g}\,100\,\mathrm{m}}\cdot\frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}}\cdot\frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}} \approx 3{,}4\,\mathrm{J/kg\,m}
$$

- Aplicamos el primer principio de la termodinámica:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathrm{q} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT}\,+\,\mathrm{g}\,\mathrm{dz}\\
\frac{\delta\mathrm{q}}{\mathrm{dz}} &= -\,\Gamma_p\,\mathrm{c}_p\,+\,\mathrm{g}\\
\Gamma_p &= \frac{\delta\mathrm{q}/\mathrm{dz}\,+\,\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p}\\
\Gamma_p &= \frac{-3{,}4\,\mathrm{J/(kg\,m)}\,+\,9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}\\
\Gamma_p &= 6{,}3\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}
$$

- Como $\alpha = 0{,}009\,\mathrm{K/m}$, en este caso $\alpha > \Gamma_p$, por lo tanto la atmósfera está en condiciones de inestabilidad.

(b) A continuación determinamos la capacidad calorífica específica politrópica (c):

- Despejamos c de la siguiente expresión de Γ_p (para un proceso politrópico):

$$\Gamma_p = -\frac{g}{c - c_p}$$
$$c = \frac{-g + \Gamma_p c_p}{\Gamma_p}$$
$$c = \frac{-9{,}8\,m/s^2 + 6{,}3\,10^{-3}\,K/m \cdot 1005\,J/(kg\,K)}{6{,}3\,10^{-3}\,K/m}$$
$$c = -550{,}5\,J/(kg\,K)$$

(c) Por último calculamos el exponente politrópico (γ_p):

$$\gamma_p = \frac{c - c_p}{c - c_v}$$
$$\gamma_p = \frac{-550{,}5\,J/(kg\,K) - 1005\,J/(kg\,K)}{-550{,}5\,J/(kg\,K) - 718\,J/(kg\,K)}$$
$$\gamma_p = 1{,}22$$

---

34. Una burbuja de aire seco evoluciona desde el nivel de referencia, en el que la temperatura atmosférica es $T'_0 = 20°C$ y la temperatura inicial de la burbuja $T_0 = 25°C$, hasta su altura de equilibrio. La masa de la burbuja es $m = 20$ kg y durante la elevación la burbuja absorbe a ritmo constante 1 kcal cada 100 m. Si el gradiente geométrico $\alpha = 0{,}007$ K/m calcúlese el valor de la altura de equilibrio y el calor específico del proceso descrito.

Solución:

(a) Cálculo de la altura de equilibrio (h_{eq}):

- En primer lugar pasamos $\delta q/dz$ a unidades del S.I:

$$\frac{\delta q}{dz} = \frac{1\,kcal}{100\,m\,20\,kg} \cdot \frac{10^3\,cal}{1\,kcal} \cdot \frac{4{,}18\,J}{1\,cal} = 2{,}09\,J/(kg\,m)$$

- A continuación calculamos Γ aplicando el primer principio :

$$\delta q = c_p dT + g\,dz$$
$$\frac{\delta q}{dz} = -c_p\Gamma_p + g$$
$$\Gamma_p = \frac{-(\delta q/dz) + g}{c_p}$$
$$\Gamma_p = \frac{-2{,}09\,J/(kg\,m) + 9{,}8\,m/s^2}{1005\,J/(kg\,K)}$$
$$\Gamma_p = 7{,}67\,10^{-3}\,K/m$$

- Procedemos a calcular la altura de equilibrio, sabiendo que en la misma, $T = T'$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 - \Gamma_p \, \mathrm{h}_{eq} \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'} &= \mathrm{T}_0' - \alpha \, \mathrm{h}_{eq} \\
\mathrm{h}_{eq} &= \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_0'}{\Gamma_p \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'} - \alpha} \\
\mathrm{h}_{eq} &= \frac{298\,\mathrm{K} - 293\,\mathrm{K}}{\frac{7{,}67\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \cdot 298\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}} - 0{,}007\,\mathrm{K/m}} \\
\mathrm{h}_{eq} &= 6243\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(b) Cálculo del calor específico (c):

- Para calcular c aplicamos el primer principio de la termodinámica para un proceso politrópico:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}\,\mathrm{dT} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz} \\
\mathrm{c} &= \mathrm{c}_p - \frac{\mathrm{g}}{\Gamma_p} \\
\mathrm{c} &= 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} - \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{7{,}67\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}} \\
\mathrm{c} &= -\,272{,}7\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}
$$

---

35. Una masa de aire seco más caliente que el ambiente sube espontánea y politrópicamente con un calor específico $c = -0{,}03$ cal/(g K). Sabiendo que la atmósfera tiene un gradiente térmico vertical α = 0,7°C/100 m y que la burbuja estaba en su nivel inicial con una temperatura de 25°C donde el ambiente tenía una temperatura de 20°C, calcúlese la altura salvada por la burbuja hasta llegar a su nivel de equilibrio.

Solución:

- En primer lugar calculamos Γ para un proceso politrópico, aplicando para ello el primer principio de la termodinámica:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}\,\mathrm{dT} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz} \\
\Gamma_p &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p - \mathrm{c}} \\
\Gamma_p &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} - \left(\frac{-\,0{,}03\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\ K}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}}\right)} \\
\Gamma_p &= 8{,}67\,10^{-3}{}^{\circ}\mathrm{C\,/m}
\end{aligned}
$$

- Por último calculamos la altura de equilibrio de la burbuja mediante la siguiente expresión, teniendo en cuenta que en dicha altura $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_e &= \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_0'}{\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'}\Gamma - \alpha} \\
\mathrm{h}_e &= \frac{298\,\mathrm{K} - 293\,\mathrm{K}}{\frac{298\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}} \cdot 8{,}67\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} - 7\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}} \\
\mathrm{h}_e &= 2750\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

---

36. Una masa de aire seco que asciende según una ley politrópica de calor específico $c = -0{,}06$ cal/(g K) evoluciona en una atmósfera de gradiente térmico vertical $\alpha = 0{,}6$°C/ 100 m. Suponiendo que parte a la misma temperatura que el ambiente (20°C), determínese la diferencia de temperatura entre la masa de aire y el ambiente al ascender 2 km.

    Solución:

    - En primer lugar calculamos Γ_p aplicando el primer principio para un proceso politrópico:

$$\begin{aligned} \mathrm{c\,dT} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g\,dz} \\ \Gamma_p &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p - \mathrm{c}} \\ \Gamma_p &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} - \left(\frac{-0{,}06\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}}\right)} \\ \Gamma_p &= 7{,}8\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \end{aligned}$$

    - A continuación calculamos T y T' mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \mathrm{T}_0 - \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'}\Gamma_p\,\mathrm{z} \\ \mathrm{T} &= 293\,\mathrm{K} - \frac{293\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}} \cdot 7{,}8\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \cdot 2000\,\mathrm{m} = 277{,}4\,\mathrm{K} \\ \mathrm{T}' &= \mathrm{T}_0' - \alpha\,\mathrm{z} \\ \mathrm{T}' &= 293\,\mathrm{K} - 6\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \cdot 2000\,\mathrm{m} = 281\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

    - Por lo tanto, $\mathrm{T} - \mathrm{T}'$ será:

$$\mathrm{T} - \mathrm{T}' = 277{,}4\,\mathrm{K} - 288\,\mathrm{K} = -3{,}6\,\mathrm{K}$$

---

37. Una masa de aire seco con una temperatura de 25°C comienza un ascenso cuando la temperatura del ambiente es de 20°C según una ley politrópica de gradiente $\Gamma_p = 1{,}2$°C/ 100 m. Sabiendo que su nivel de equilibrio está a 1500 m por encima del nivel inicial, calcúlese el gradiente térmico vertical de la atmósfera.

    Solución:

    - Calculamos el gradiente térmico atmosférico partiendo de la siguiente expresión, la cual resulta de la condición de equilibrio, donde $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$:

$$\mathrm{T}_0 - \Gamma_p\,\mathrm{z}\,\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'} = \mathrm{T}_0' - \alpha\,\mathrm{z}$$

    - Despejando α, obtenemos que:

$$\alpha = \frac{T_0' - T_0 + \Gamma_p\, z\, \frac{T_0}{T_0'}}{z}$$
$$\alpha = \frac{293\,K - 298\,K + 0{,}012\,K/m \cdot 1500\,m \cdot \frac{298\,K}{293\,K}}{1500\,m}$$
$$\alpha = 0{,}0088\,K/m$$

---

38. Sean dos masas de aire seco con una temperatura de 25°C que están rodeadas por aire a 23°C. Supongamos que una asciende de forma adiabática hasta su altura de equilibrio y la otra de forma politrópica llegando a una altura 100 m por encima de la primera. Si $\alpha = 0{,}0065$°C y la presión es P = 1013 hPa calcule:

 a) El calor específico asociado al proceso politrópico.

 b) La presión en los dos niveles de equilibrio.

 Solución:

 (a) Cálculo de la capacidad calorífica en el procerso politrópico:

 - En primer lugar calculamos el gradiente adiabático aplicando el primer principio de la termodinámica:

$$0 = c_p\, dT + g\, dz$$
$$\Gamma_{ad} = \frac{g}{c_p}$$
$$\Gamma_{ad} = \frac{9{,}8\,m/s^2}{1005\,J/(kg\,K)}$$
$$\Gamma_{ad} = 9{,}75\,10^{-3}\,K/m$$

 - A continuación calculamos la altura de equilibrio del proceso adiabático (h_{ad}):

$$h_{ad} = \frac{T_0 - T_0'}{\frac{T_0}{T_0'} \cdot \Gamma - \alpha}$$
$$h_{ad} = \frac{298\,K - 296\,K}{\frac{298\,K}{296\,K} \cdot 9{,}75\,10^{-3}\,K/m - 0{,}0065\,K/m}$$
$$h_{ad} = 603{,}16\,m \approx 603\,m$$

 - Así pues, la altura correspondiente al proceso politrópico será la siguiente:

$$h_{po} = h_{ad} + 100\,m = 703{,}16\,m \approx 703\,m$$

 - Como α es el mismo para ambos procesos, calculamos Γ_p para el proceso politrópico:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 - \Gamma_p \, \mathrm{h}_p \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'} &= \mathrm{T}_0' - \alpha \, \mathrm{h}_p \\
\Gamma_p &= \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_0' + \mathrm{h}_p \alpha}{\mathrm{h}_p \, (\mathrm{T}_0/\mathrm{T}_0')} \\
\Gamma_p &= \frac{298\,\mathrm{K} - 296\,\mathrm{K} + 703{,}16\,\mathrm{m} \cdot 0{,}0065\,\mathrm{K/m}}{703{,}16\,\mathrm{m} \cdot (298\,\mathrm{K}/296\,\mathrm{K})} \\
\Gamma_p &= 9{,}28\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Ahora, estamos ya en disposición de calcular el calor específico (c) aplicando para ello el primer principio de la termodinámica para un proceso politrópico:

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}\,\mathrm{dT} &= \mathrm{c}_p \, \mathrm{dT} + \mathrm{g}\,\mathrm{dz} \\
\mathrm{c} &= \mathrm{c}_p - \frac{\mathrm{g}}{\Gamma_p} \\
\mathrm{c} &= 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} - \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{9{,}28\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}} \\
\mathrm{c} &= -\,51{,}0\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

(b) Presión en los dos niveles de equilibrio: P_2^{ad} y P_2^{po}

(b.1) Para obtener la presión en el proceso adiabático aplicamos una de las ecuaciones de Poisson, donde $\gamma = 1{,}4$:

$$\frac{\mathrm{T}_1^{\gamma}}{\mathrm{T}_2^{\gamma}} = \frac{\mathrm{P}_1^{\gamma-1}}{\mathrm{P}_2^{\gamma-1}}$$

- Pero antes debemos calcular T_2 mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_2 &= \mathrm{T}_0 - \Gamma_{ad} \, \mathrm{h}_{ad} \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}_0'} \\
\mathrm{T}_2 &= 298\,\mathrm{K} - 9{,}75\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \cdot 603\,\mathrm{m} \cdot \frac{298\,\mathrm{K}}{296\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{T}_2 &= 292{,}1\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

- Estamos ya en disposición de calcular P_2^{ad} mediante la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_2^{ad} &= \mathrm{P}_1 \left(\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\mathrm{P}_2^{ad} &= 1013\,\mathrm{hPa} \left(\frac{292{,}1\,\mathrm{K}}{298\,\mathrm{K}} \right)^{\frac{1{,}4}{0{,}4}} \\
\mathrm{P}_2^{ad} &= 944{,}5\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

(b.2) La presión en el equilibrio del proceso politrópico también vendrá dado por:

$$P_2^{po} = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

- En este caso, γ será:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{c - c_p}{c - c_v} \\
\gamma &= \frac{-51{,}03\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{-51{,}03\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 718{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \\
\gamma &= 1{,}37
\end{aligned}$$

- Por otro lado, calculamos T_2^{po} mediante:

$$\begin{aligned}
T_2^{po} &= T_0 - \Gamma_p\, h_{po} \frac{T_0}{T_0'} \\
T_2^{po} &= 298\,\mathrm{K} - 9{,}28\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \cdot 703\,\mathrm{m} \cdot \frac{298\,\mathrm{K}}{296\,\mathrm{K}} \\
T_2^{po} &= 291{,}4\,\mathrm{K} \approx 291\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, P_2^{po} será:

$$\begin{aligned}
P_2^{po} &= 1013\,\mathrm{hPa} \left(\frac{291{,}4\,\mathrm{K}}{298\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1{,}37}{0{,}37}} \\
P_2^{po} &= 932{,}4\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

---

39. Una masa de aire seco situada en el nivel 900 hPa tiene una temperatura de -3°C. Suponiendo que evoluciona politrópicamente hasta los 700 hPa con una calor específico $c = -0{,}03$ cal/(g K), determínese su densidad en el nivel superior.

Solución:

- En primer lugar calculamos el índice politrópico para posteriormente calcular la temperatura en el nivel de presión de 700 hPa (T_2):

$$\begin{aligned}
\gamma_p &= \frac{c - c_p}{c - c_v}, \\
\gamma_p &= \frac{\left(\frac{-0{,}03\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}}\right) - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{\left(\frac{-0{,}03\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \frac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \frac{10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}}\right) - 718{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)}}. \\
\gamma_p &= 1{,}34\,.
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos T_2 aplicando una de las ecuaciones de Poisson para un proceso politrópico:

$$\begin{aligned}
\frac{T_1^{\gamma_p}}{T_2^{\gamma_p}} &= \frac{P_1^{\gamma_p-1}}{P_2^{\gamma_p-1}}\,, \\
T_2 &= \left(\frac{P_2^{\gamma_p-1}\cdot T_1^{\gamma_p}}{P_1^{\gamma_p-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_p}}, \\
T_2 &= \left(\frac{700^{0,34}\,\mathrm{hPa}\cdot 270^{1,34}\,\mathrm{K}}{900^{0,34}\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1}{1,34}}, \\
T_2 &= 253{,}3\,\mathrm{K} \approx 253\,\mathrm{K}\,.
\end{aligned}$$

- Así pues, en el nivel superior, $T_2 = 253$K y $P_2 = 700$hPa. Por lo tanto, la densidad (ρ) vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
P &= \rho\, r\, T\,, \\
\rho &= \frac{P}{r\,T}\,, \\
\rho &= \frac{70000\,\mathrm{Pa}}{286{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 253\,\mathrm{K}}\,, \\
\rho &= 0{,}96\,\mathrm{kg/m^3}\,.
\end{aligned}$$

---

40. Una masa de aire en superficie se calienta hasta alcanzar una temperatura de 35°C, mientras la temperatura de su entorno se mantiene a 25°C. Dicha masa asciende politrópicamente desde el nivel inicial (calentándose por radiación) hasta alcanzar el equilibrio en un estrato, 2000 m por encima. ¿Cuál será el índice de politropía si la temperatura de la atmósfera era, al paso por los 1000 m, de 15°C?

    Solución:

    - En primer lugar calculamos α mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
T' &= T'_0 - \alpha\, z \\
\alpha &= \frac{T'_0 - T_0}{z} \\
\alpha &= \frac{298\,\mathrm{K} - 288\,\mathrm{K}}{1000\,\mathrm{m}} \\
\alpha &= 0{,}01\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

    - A continuación calculamos Γ_p para la altura de equilibrio $h_e = 2000$m sabiendo que, en el nivel de equilibrio, $T' = T$. Así pues:

$$\begin{aligned}
T'_0 - \alpha\, h_e &= T_0 - \frac{T_0}{T'_0}\Gamma_p\, h_e \\
\Gamma_p &= \frac{T_0 - T'_0 + \alpha\, h_e}{h_e(T_0/T'_0)} \\
\Gamma_p &= \frac{308\,\mathrm{K} - 298\,\mathrm{K} + 0{,}01\,\mathrm{K/m}\cdot 2000\,\mathrm{m}}{2000\,\mathrm{m}\cdot(308\,\mathrm{K}/298\,\mathrm{K})} \\
\Gamma_p &= 1{,}45\,10^{-2}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Calculamos también el calor específico asociado a este proceso politrópico aplicando para ello el primer principio de la termodinámica para dicho proceso:

$$\begin{aligned} \mathrm{c\,dT} &= \mathrm{c}_p\,\mathrm{dT} + \mathrm{g\,dz} \\ \mathrm{c} &= \mathrm{c}_p - \frac{\mathrm{g}}{\Gamma_p} \\ \mathrm{c} &= 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} - \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}45\,10^{-2}\,\mathrm{K/m}} \\ \mathrm{c} &= 329{,}14\,\mathrm{J/(kg\,K)} \end{aligned}$$

- Por último, procedemos a calcular el índice politrópico del proceso (γ_p):

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{\mathrm{c} - \mathrm{c}_p}{\mathrm{c} - \mathrm{c}_v} \\ \gamma_p &= \frac{329{,}14\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{329{,}14\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 718{,}4\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \\ \gamma_p &= 1{,}74 \end{aligned}$$

---

41. Una masa de aire tiene una presión de 1013 mb, una temperatura de 285 K y una proporción de mezcla de 3 g · kg^{-1}. Calcúlese: (a) la humedad relativa, (b) la densidad de la masa de aire.

Dato: E(12°C)=14,01 mb.

Solución:

(a) Cálculo de la humedad relativa (h):

- En primer lugar calculamos la presión parcial de vapor (e) a partir de la proporción de mezcla (m):

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\ & \quad (\text{ó de forma aproximada } m \approx \epsilon\frac{e}{P}) \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{P\,m}}{\epsilon + \mathrm{m}} \\ \mathrm{e} &= \frac{1013\,\mathrm{mb} \cdot 3\,10^{-3}}{0{,}622 + 3\,10^{-3}} \\ \mathrm{e} &= 4{,}86\,\mathrm{mb} \end{aligned}$$

- A continuación, procedemos a calcular h, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\ \mathrm{h} &= \frac{4{,}86\,\mathrm{mb}}{14{,}01\,\mathrm{mb}} \cdot 100 \\ \mathrm{h} &= 35\,\% \end{aligned}$$

(b) Cálculo de la densidad de la masa de aire húmedo ($\overline{\rho}$):

- Para una masa de aire húmedo tenemos que $P = \overline{\rho}\,\bar{r}\,T$, así pues, calcularemos en primer lugar la humedad específica (q) para así poder obtener $\bar{r}$:

$$q = \frac{m}{m + 1}$$
$$q = \frac{3\,10^{-3}}{3\,10^{-3} + 1}$$
$$q = 2{,}99\,10^{-3}$$

- Calculamos $\bar{r}$ sabiendo que $\bar{r} = r_a\,q + r_s\,(1 - q)$:

$$\bar{r} = r_a\,q + r_s\,(1 - q)$$
$$\bar{r} = 459{,}8\,J/(kg\,K) \cdot 2{,}99\,10^{-3} + 286{,}9\,J/(kg\,K)\,(1 - 2{,}99\,10^{-3})$$
$$\bar{r} = 287{,}4\,J/(kg\,K)$$

- Por último calculamos $\overline{\rho}$:

$$\overline{\rho} = \frac{P}{\bar{r}\,T}$$
$$\overline{\rho} = \frac{101300\,Pa}{287{,}4\,J/(kg\,K) \cdot 285\,K}$$
$$\overline{\rho} = 1{,}24\,kg/m^3$$

---

42. Suponiendo una masa de aire saturada con una presión de 1000 mb y una temperatura de 14°C, y sabiendo además que la proporción de mezcla vale M=10,10 g/kg, determínese la tensión de saturación que corresponde a esta proporción de mezcla saturante a las siguientes presiones: (a) 1000 mb; (b) 850 mb; (c) 700 mb; (d) 500 mb; (e) 300 mb.

Solución:

- Al ser una masa de aire saturada, la proporción de mezcla viene dada por la siguiente expresión:

$$M = \epsilon\,\frac{E}{P - E}$$

(a) Caso a: P = 1000 mb

$$E = \frac{P\,M}{\epsilon + M}$$
$$E = \frac{1000\,mb \cdot 10{,}1\,10^{-3}}{0{,}622 + 10{,}1\,10^{-3}}$$
$$E = 16{,}0\,mb$$

(b) Caso b: P = 850 mb

$$\begin{aligned} E &= \frac{P\,M}{\epsilon + M} \\ E &= \frac{850\,\text{mb} \cdot 10{,}1\,10^{-3}}{0{,}622 + 10{,}1\,10^{-3}} \\ E &= 13{,}6\,\text{mb} \end{aligned}$$

(c) Caso c: P = 700 mb

$$\begin{aligned} E &= \frac{P\,M}{\epsilon + M} \\ E &= \frac{700\,\text{mb} \cdot 10{,}1\,10^{-3}}{0{,}622 + 10{,}1\,10^{-3}} \\ E &= 11{,}2\,\text{mb} \end{aligned}$$

(d) Caso d: P = 500 mb

$$\begin{aligned} E &= \frac{P\,M}{\epsilon + M} \\ E &= \frac{500\,\text{mb} \cdot 10{,}1\,10^{-3}}{0{,}622 + 10{,}1\,10^{-3}} \\ E &= 8{,}0\,\text{mb} \end{aligned}$$

(e) Caso e: P = 300 mb

$$\begin{aligned} E &= \frac{P\,M}{\epsilon + M} \\ E &= \frac{300\,\text{mb} \cdot 10{,}1\,10^{-3}}{0{,}622 + 10{,}1\,10^{-3}} \\ E &= 4{,}8\,\text{mb} \end{aligned}$$

---

43. Calcule las constantes $\overline{r}$ y $\overline{c_p}$ de una masa de aire húmedo, sabiendo que la tensión de vapor es de 10 mb y la presión de 1005 mb. Determine también el gradiente adiabático, $\overline{\Gamma}$, de esta masa de aire.

Solución:

(a) Cálculo de $\overline{\text{r}}$ y $\overline{c_p}$:

- En primer lugar calculamos la proporción de mezcla (m) y la humedad específica (q):

$$\mathrm{m} = \epsilon \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}}$$
$$\mathrm{m} = 0{,}622 \cdot \frac{10\,\mathrm{mb}}{1005\,\mathrm{mb} - 10\,\mathrm{mb}}$$
$$\mathrm{m} = 6{,}25\,10^{-3}$$

$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1}$$
$$\mathrm{q} = \frac{6{,}25\,10^{-3}}{6{,}25\,10^{-3} + 1}$$
$$\mathrm{q} = 6{,}21\,10^{-3}$$

(nótese que $q \approx m$)

- A continuación calculamos $\bar{\mathrm{r}}$:

$$\bar{\mathrm{r}} = \mathrm{r}_a\,\mathrm{q} + \mathrm{r}_s\,(1 - \mathrm{q})$$
$$\bar{\mathrm{r}} = 459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 6{,}21\,10^{-3} + 286{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,(1 - 6{,}21\,10^{-3})$$
$$\bar{\mathrm{r}} = 288\,\mathrm{J/(kg\,K)}$$

- Así pues, $\overline{\mathrm{c}_p}$ será:

$$\overline{\mathrm{c}_p} = \mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}\,(1 - \mathrm{q})$$
$$\overline{\mathrm{c}_p} = 1855{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 6{,}21\,10^{-3} + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,(1 - 6{,}21\,10^{-3})$$
$$\overline{\mathrm{c}_p} = 1009{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}$$

(b) Cálculo del gradiente adiabático ($\overline{\Gamma}$):

- Teniendo en cuenta la definición de $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma} = \frac{\mathrm{g}}{\overline{\mathrm{c}_p}}$$
$$\overline{\Gamma} = \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1009{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}}$$
$$\overline{\Gamma} = 9{,}7\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$$

Como se observa $\overline{\Gamma}$ (para aire húmedo) es menor que Γ (para aire seco).

---

44. Sabiendo que la presión atmosférica en una masa de aire es de 985 mb, que su temperatura es de 20°C y que su tensión de vapor tiene un valor de 18,2 mb, calcúlese la densidad del aire en los siguientes casos: (a) suponiéndolo totalmente seco, (b) en las condiciones reales de humedad.

Solución:

(a) Si consideramos el aire totalmente seco, atenderemos a la expresión $\mathrm{P} = \rho\,\mathrm{r}\,\mathrm{T}$:

$$\rho = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{r\,T}}$$
$$\rho = \frac{98500\,\mathrm{Pa}}{286{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 293\,\mathrm{K}}$$
$$\rho = 1{,}17\,\mathrm{kg/m^3}$$

(b) Si el aire es húmedo, atenderemos a $\mathrm{P} = \overline{\rho}\,\bar{\mathrm{r}}\,\mathrm{T}$.

- Calculamos en primer lugar la proporción de mezcla (m) y la humedad específica (q) para así obtener $\bar{\mathrm{r}}$.

$$\mathrm{m} = \epsilon\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}}$$
$$\mathrm{m} = 0{,}622 \cdot \frac{18,2\,\mathrm{mb}}{985\,\mathrm{mb} - 18,2\,\mathrm{mb}}$$
$$\mathrm{m} = 1{,}17\,10^{-2}$$

$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1}$$
$$\mathrm{q} = \frac{1{,}17\,10^{-2}}{1{,}17\,10^{-2} + 1}$$
$$\mathrm{q} = 1{,}16\,10^{-2} \text{ (nótese que } q \approx m)$$

$$\bar{\mathrm{r}} = \mathrm{r}_a\,\mathrm{q} + \mathrm{r}_s\,(1 - \mathrm{q})$$
$$\bar{\mathrm{r}} = 459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 1{,}16\,10^{-2} + 286{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,(1 - 1{,}16\,10^{-2})$$
$$\bar{\mathrm{r}} = 288{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}$$

- Por lo tanto, la densidad del aire húmedo será:

$$\overline{\rho} = \frac{\mathrm{P}}{\bar{\mathrm{r}}\,\mathrm{T}}$$
$$\overline{\rho} = \frac{98500\,\mathrm{Pa}}{288{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 293\,\mathrm{K}}$$
$$\overline{\rho} = 1{,}16\,\mathrm{kg/m^3}$$

---

45. Una masa de aire húmedo a 850 mb de presión tiene una temperatura de 2°C y una humedad específica de 4 g·/kg. Calcúlese: (a) tensión de vapor, (b) humedad relativa, (c) humedad absoluta y humedad absoluta saturante, (d)temperatura virtual.

Dato: E(2°C)=7,05 mb.

Solución:

(a) Cálculo de la tensión de vapor (e):

- En primer lugar calculamos la proporción de mezcla (m) a partir de la humedad específica (q):

$$\begin{aligned} q &= \frac{m}{m + 1} \\ m &= \frac{q}{1 - q} \\ m &= \frac{4\,10^{-3}}{1 - 4\,10^{-3}} \\ m &= 4{,}02\,10^{-3} \end{aligned}$$

- A continuación calculamos la tensión de vapor mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} m &= \epsilon\frac{e}{P - e} \\ e &= \frac{m\,P}{\epsilon + m} \\ e &= \frac{4{,}02\,10^{-3} \cdot 850\,\text{mb}}{0{,}622 + 4{,}02\,10^{-3}} \\ e &= 5{,}46\,\text{mb} \end{aligned}$$

(b) Cálculo de la humedad relativa (h):

- La humedad relativa será la siguiente:

$$\begin{aligned} h &= \frac{e}{E} \cdot 100 \\ h &= \frac{5{,}46\,\text{mb}}{7{,}05\,\text{mb}} \cdot 100 \\ h &= 77{,}5\,\% \end{aligned}$$

(c) Cálculo de la humedad absoluta, a, y la humedad absoluta saturante, A:

- La humedad absoluta, a, se obtendrá a partir de:

$$\begin{aligned} e &= a\,r_a\,T \\ a &= \frac{e}{r_a\,T} \\ a &= \frac{546\,\text{Pa}}{459{,}8\,\text{J/(kg K)} \cdot 275\,\text{K}} \\ a &= 4{,}3\,\text{g/m}^3 \end{aligned}$$

- La humedad absoluta saturante, A, se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} E &= A\,r_a\,T \\ A &= \frac{E}{r_a\,T} \\ A &= \frac{705\,\text{Pa}}{459{,}8\,\text{J/(kg K)} \cdot 275\,\text{K}} \\ A &= 5{,}6\,\text{g/m}^3 \end{aligned}$$

(d) La temperatura virtual (T_v) se calcula atendiendo a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_v\, r_s &= \mathrm{T}\,\bar{\mathrm{r}} \\ \mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5}\,\mathrm{q} + 1\right)\mathrm{T} \\ \mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5}\cdot 4\,10^{-3} + 1\right) 275\,\mathrm{K} \\ \mathrm{T}_v &= 275{,}7\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

---

46. Calcule la constante $\overline{r}$ y el calor específico de una masa de aire húmedo, $\overline{c_p}$, sabiendo que su temperatura es de 22°C, su humedad relativa del 70 % y su presión de 1010 mb. Determine también la temperatura virtual y la humedad absoluta.

Dato: E(22°C)=26,44 mb.

Solución:

- Para empezar calculamos la presión de vapor, e, a partir de la humedad relativa, h, y de la tensión de saturación:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{h}\cdot\mathrm{E}}{100} \\ \mathrm{e} &= \frac{70\cdot 26{,}44\,\mathrm{mb}}{100} \\ \mathrm{e} &= 18{,}51\,\mathrm{mb} \end{aligned}$$

(a) Cálculo de la constante $\bar{\mathrm{r}}$:

- En primer lugar calculamos la proporción de mezcla, m:

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon\cdot\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\ \mathrm{m} &= 0622\cdot\frac{1851\,\mathrm{Pa}}{101000\,\mathrm{Pa} - 1851\,\mathrm{Pa}} \\ \mathrm{m} &= 1{,}16\,10^{-2} \end{aligned}$$

- A continuación calculamos la humedad específica. q:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\ \mathrm{q} &= \frac{1{,}16\cdot 10^{-2}}{1{,}16\cdot 10^{-2} + 1} \\ \mathrm{q} &= 1{,}15\,10^{-2} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la constante $\bar{\mathrm{r}}$ será:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{r}} &= \mathrm{r}_a\,\mathrm{q} + \mathrm{r}_s\,(1 - \mathrm{q}) \\
\bar{\mathrm{r}} &= 459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 1{,}15\,10^{-2} + 286{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot (1 - 1{,}15\,10^{-2}) \\
\bar{\mathrm{r}} &= 288{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

(b) Cálculo del calor específico de la masa de aire húmedo, $\overline{c_p}$:

- El calor específico de una masa de aire húmedo viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\overline{c_p} &= \mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q}) \\
\overline{c_p} &= 1885{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 1{,}15\,10^{-2} + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot (1 - 1{,}15\,10^{-2}) \\
\overline{c_p} &= 1015\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

(c) Cálculo de la temperatura virtual, T_v, de esta masa de aire:

- La temperatura virtual vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5}\mathrm{q} + 1\right)\mathrm{T} \\
\mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5} \cdot 1{,}15\,10^{-2} + 1\right) \cdot 295\,\mathrm{K} \\
\mathrm{T}_v &= 297\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(d) Cálculo de la humedad absoluta, a:

- La humedad absoluta, a, será la siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\
\mathrm{a} &= \frac{1851\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 295\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{a} &= 1{,}36\,10^{-2}\,\mathrm{kg/m^3}
\end{aligned}$$

---

47. Una masa de aire húmedo tiene una humedad relativa del 90 %, una presión de 1015 mb y una temperatura de 20°C. Calcúlese el gradiente adiabático de dicha masa de aire.

Dato: E(20°C)=23,48 mb.

Solución:

- En primer lugar calculamos la presión de vapor, e, a partir de la humedad relativa, h:

$$\begin{aligned}
\mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\
\mathrm{e} &= \frac{\mathrm{E\,h}}{100} \\
\mathrm{e} &= \frac{23{,}48\,\mathrm{mb}\cdot\ 90}{100} \\
\mathrm{e} &= 21{,}13\,\mathrm{mb}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos la proporción de mezcla, m, y la humedad específica, q, de esa masa de aire:

$$\begin{aligned}
\mathrm{m} &= \epsilon\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P}\,-\,\mathrm{e}} \\
\mathrm{m} &= 0{,}622\cdot\ \frac{2113\,\mathrm{Pa}}{101500\,\mathrm{Pa}\,-\,2113\,\mathrm{Pa}} \\
\mathrm{m} &= 1{,}32\,10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}\,+\,1} \\
\mathrm{q} &= \frac{1{,}32\,10^{-2}}{1{,}32\,10^{-2}\,+\,1} \\
\mathrm{q} &= 1{,}30\cdot\ 10^{-2}
\end{aligned}$$

- Una vez obtenidas m y q, podemos calcular el calor específico, $\overline{\mathrm{c}_p}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{c}_p} &= \mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q}\,+\,\mathrm{c}_{ps}\,(1\,-\,\mathrm{q}) \\
\overline{\mathrm{c}_p} &= 1855{,}9\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot\ 1{,}30\,10^{-2}\,+\,1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,(1\,-\,1{,}32\,10^{-2}) \\
\overline{\mathrm{c}_p} &= 1016\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

- Por último, teniendo en cuenta la definición del gradiente adiabático, $\overline{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\overline{\mathrm{c}_p}} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1016\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \\
\overline{\Gamma} &= 9{,}65\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

---

48. Sabiendo que la temperatura es de 6°C y que la humedad relativa es del 50 %, determínese:

    (a) La humedad absoluta y la humedad absoluta saturante.

    (b) La proporción de mezcla y la humedad específica.

Datos: $P = 1010$ mb, E(6°C)=9,35 mb.

Solución:

(a) Cálculo de la humedad absoluta, a, y la humedad absoluta saturante, A

- En primer lugar calculamos la presión de vapor, e:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\
\mathrm{e} &= \frac{\mathrm{h\,E}}{100} \\
\mathrm{e} &= \frac{50 \cdot 9{,}35\,\mathrm{mb}}{100} \\
\mathrm{e} &= 4{,}68\,\mathrm{mb}
\end{aligned}
$$

- La humedad absoluta, a, vendrá dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\
\mathrm{a} &= \frac{468\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 279\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{a} &= 3{,}64\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}
\end{aligned}
$$

- La humedad absoluta saturante, A, será:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\
\mathrm{A} &= \frac{935\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 279\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{A} &= 7{,}29\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}
\end{aligned}
$$

(b) Cálculo de la proporción de mezcla, m, y de la humedad específica, q,

- La proporción de mezcla será:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{m} &= \epsilon \cdot \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\
\mathrm{m} &= 0{,}622 \cdot \frac{468\,\mathrm{Pa}}{101000\,\mathrm{Pa} - 468\,\mathrm{Pa}} \\
\mathrm{m} &= 2{,}9\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

- La humedad específica será la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\
\mathrm{q} &= \frac{2{,}9\,10^{-3}}{2{,}9\,10^{-3} + 1} \\
\mathrm{q} &= 2{,}89\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

---

49. Se tienen las siguientes observaciones en superficie: presión 1013 mb, temperatura 15°C y proporción de mezcla $5{,}11\,10^{-3}$. Calcule a partir de estos datos: (a) la humedad específica; (b) la humedad relativa; (c) la humedad absoluta.

Dato: E(15°C)=17,04 mb.

Solución:

(a) Cálculo de la humedad específica, q:

- La humedad específica es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\ \mathrm{q} &= \frac{5{,}11\,10^{-3}}{5{,}11\,10^{-3} + 1} \\ \mathrm{q} &= 5{,}08\,10^{-3} \end{aligned}$$

(b) Cálculo de la humedad relativa, h:

- En primer lugar calculamos la presión de vapor, e, a partir de la proporción de mezcla, m:

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon \cdot \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{P\,m}}{\epsilon + \mathrm{m}} \\ \mathrm{e} &= \frac{101300\,\mathrm{Pa} \cdot 5{,}11\,10^{-3}}{0{,}622 + 5{,}11\,10^{-3}} \\ \mathrm{e} &= 825{,}4\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la humedad relativa vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}} \cdot 100 \\ \mathrm{h} &= \frac{825{,}4\,\mathrm{Pa}}{1704\,\mathrm{Pa}} \cdot 100 \\ \mathrm{h} &= 49\,\% \end{aligned}$$

(c) Cálculo de la humedad absoluta, a:

- La humedad absoluta vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\ \mathrm{a} &= \frac{825{,}4\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 288\,\mathrm{K}} \\ \mathrm{a} &= 6{,}4\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3} \end{aligned}$$

---

50. Una masa de aire tiene una temperatura de 12°C, una presión de 1020 mb y una humedad relativa del 75 %. Si E(12°C)=14,01 mb, calcúlese: (a) la proporción de mezcla; (b) la humedad específica; (c) la humedad absoluta.

Solución:

- Calculamos en primer lugar la presión de vapor, e, a partir de la humedad relativa:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{E\,h}}{100} \\ \mathrm{e} &= \frac{14{,}01\,\mathrm{mb}\cdot 75}{100} \\ \mathrm{e} &= 10{,}51\,\mathrm{mb} \end{aligned}$$

(a) Cálculo de la proporción de mezcla, m:

- La proporción de mezcla vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon\cdot\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P}-\mathrm{e}} \\ \mathrm{m} &= 0{,}622\cdot\frac{1051\,\mathrm{Pa}}{102000\,\mathrm{Pa}-1051\,\mathrm{Pa}} \\ \mathrm{m} &= 6{,}48\,10^{-3} \end{aligned}$$

(b) Cálculo de la humedad específica, q,

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}+1} \\ \mathrm{q} &= \frac{6{,}48\,10^{-3}}{6{,}48\,10^{-3}+1} \\ \mathrm{q} &= 6{,}42\,10^{-3} \end{aligned}$$

(c) Cálculo de la humedad absoluta, a:

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\cdot\mathrm{T}} \\ \mathrm{a} &= \frac{1051\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 285\,\mathrm{K}} \\ \mathrm{a} &= 8{,}0\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3} \end{aligned}$$

---

51. Sabiendo que una masa de aire húmedo tiene una humedad absoluta de 8 g m^{-3}, una temperatura de 15°C y una presión de 1005 mb, calcúlese: (a) la humedad relativa; (b) la humedad específica;(c) la temperatura virtual.

Dato: E(15°C)=17,04 mb.

Solución:

(a) Cálculo de la humedad relativa (h):

- En primer lugar, calculamos la presión de vapor, e, a partir de la humedad absoluta:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\
\mathrm{e} &= \mathrm{a}\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T} \\
\mathrm{e} &= 8\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 288\,\mathrm{K} \\
\mathrm{e} &= 1059{,}4\,\mathrm{Pa} = 10{,}59\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto, la humedad relativa será la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}} \cdot 100 \\
\mathrm{h} &= \frac{1059{,}4\,\mathrm{Pa}}{1704\,\mathrm{Pa}} \cdot 100 \\
\mathrm{h} &= 62\,\%
\end{aligned}
$$

(b) Cálculo de la humedad específica, q:

- En primer lugar calculamos la proporción de mezcla, m,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{m} &= \epsilon\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\
\mathrm{m} &= 0{,}622 \cdot \frac{1059{,}4\,\mathrm{Pa}}{100500\,\mathrm{Pa} - 1059{,}4\,\mathrm{Pa}} \\
\mathrm{m} &= 6{,}6\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto, la humedad específica será aproximadamente igual a ésta. Si la calculamos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\
\mathrm{q} &= \frac{6{,}6\,10^{-3}}{6{,}6\,10^{-3} + 1} \\
\mathrm{q} &= 6{,}58\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

(c) Cálculo de la temperatura virtual, T_v,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_v\,\mathrm{r}_s &= \mathrm{T}\,\overline{r} \\
\mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5}\,\mathrm{q} + 1\right)\mathrm{T} \\
\mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5} \cdot 6{,}58\,10^{-3} + 1\right) 288\,\mathrm{K} \\
\mathrm{T}_v &= 289,2\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

---

52. Calcúlese la humedad absoluta de una masa de aire húmedo sabiendo que la temperatura virtual es de 30°C, la temperatura es de 28°C y la presión es de 1013 mb.

Solución:

- La humedad absoluta viene definida por la siguiente expresión:

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a \cdot \mathrm{T}}$$

- Es necesario conocer la presión de vapor, e, para lo cual calcularemos en primer lugar la humedad específica, q, a partir de la temperatura virtual, T_v así como la proporción de mezcla, m.

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_v\,\mathrm{r}_s &= \mathrm{T}\,\overline{r} \\
\mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5}\mathrm{q} + 1\right)\mathrm{T} \\
\mathrm{q} &= \frac{5}{3}\frac{\mathrm{T}_v - \mathrm{T}}{\mathrm{T}} \\
\mathrm{q} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{303\,\mathrm{K} - 301\,\mathrm{K}}{301\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{q} &= 1{,}11\,10^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{q}}{1 - \mathrm{q}} \\
\mathrm{m} &= \frac{1{,}117\,10^{-2}}{1 - 1{,}107\,10^{-2}} \\
\mathrm{m} &= 1{,}11\,10^{-2}
\end{aligned}$$

- A continuación, calculamos la presión de vapor e,

$$\begin{aligned}
\mathrm{m} &= \epsilon \cdot \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\
\mathrm{e} &= \frac{\mathrm{m\,P}}{\epsilon + \mathrm{m}} \\
\mathrm{e} &= \frac{1{,}11\,10^{-2} \cdot 101300\,\mathrm{Pa}}{0{,}622 + 1{,}112\,10^{-2}} \\
\mathrm{e} &= 1780\,\mathrm{Pa} = 17{,}80\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

- Por lo tanto, la humedad absoluta será:

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\
\mathrm{a} &= \frac{1780\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 301\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{a} &= 13\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3}
\end{aligned}$$

---

53. Calcúlese la densidad del vapor de agua de una muestra de aire húmedo sabiendo que la temperatura del aire húmedo es $T = 4°\text{C}$ y la humedad relativa del 40 %. Dato: E(4°C)=8,1 mb.

Solución:

- En primer lugar calculamos la presión de vapor, e asociada a esta masa de aire húmedo:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}100 \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{h\,E}}{100} \\ \mathrm{e} &= \frac{40 \cdot 8{,}1\,\mathrm{mb}}{100} \\ \mathrm{e} &= 3{,}24\,\mathrm{mb} \end{aligned}$$

- La densidad de vapor del agua, es decir su humedad absoluta, será por tanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}} \\ \mathrm{a} &= \frac{324\,\mathrm{Pa}}{459{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 277\,\mathrm{K}} \\ \mathrm{a} &= 2{,}5\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3} \end{aligned}$$

---

54. En el nivel de presión P = 1024 hPa, la temperatura atmosférica es de 21°C . En ese punto, calentamos una masa de aire hasta una temperatura T = 25°C , dejándola evolucionar politrópicamente (con c = −0,01 cal/(g °C)) hasta alcanzar de nuevo el equilibrio en el nivel de presión P = 752,4 hPa, 2700 m por encima del nivel inicial. Determínese a) la humedad específica del aire, supuesta constante entre los dos niveles, b) el calor específico de la mezcla y c) la presión parcial de vapor de agua para los dos niveles.

Solución:

(a) Cálculo del calor específico de la mezcla, $\overline{\mathrm{c}_p}$:

- Calculamos en primer lugar la temperatura de equilibrio aplicando una de las ecuaciones de Poisson para un proceso politrópico.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\mathrm{c} - \mathrm{c}_p}{\mathrm{c} - \mathrm{c}_v} \\ \gamma &= \frac{\left(\dfrac{-0{,}01\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \dfrac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \dfrac{1000\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}} - 1005\right)}{\left(\dfrac{-0{,}01\,\mathrm{cal}}{\mathrm{g\,K}} \cdot \dfrac{4{,}18\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{cal}} \cdot \dfrac{1000\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}} - 718\right)} \\ \gamma &= 1{,}38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{T_0^{\gamma}}{T_1^{\gamma}} &= \frac{P_0^{\gamma-1}}{P_1^{\gamma-1}}\\
T_1 &= T_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\
T_1 &= 298\,\mathrm{K}\left(\frac{752{,}4\,\mathrm{hPa}}{1024\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1{,}38-1}{1{,}38}}\\
T_1 &= 273{,}75\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos $\overline{\Gamma}_p$ a partir de las condiciones para la altura de equilibrio,

$$\begin{aligned}
T_0 - \overline{\Gamma}_p \cdot z \cdot \frac{T_0}{T_0'} &= T_1 = 273{,}75\mathrm{K}\\
\overline{\Gamma}_p &= \frac{T_0'\,(T_0 - T_1)}{T_0\,z}\\
\overline{\Gamma}_p &= 8{,}86\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Conociendo $\overline{\Gamma}_p$ podemos calcular $\overline{c_p}$

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_p &= \frac{g}{\overline{c_p} - c}\\
\overline{c_p} &= \frac{g}{\overline{\Gamma}_p} + c\\
\overline{c_p} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{8{,}86\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}} - 41{,}8\,\mathrm{J/(kg\,K)}\\
\overline{c_p} &= 1064\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

(b) Cálculo de la humedad específica del aire (q):

- Despejamos q de la expresión de $\overline{c_p}$:

$$\begin{aligned}
\overline{c_p} &= c_{pa}\,q + c_{ps}\,(1 - q)\\
q &= \frac{\overline{c_p} - c_{ps}}{c_{pa} - c_{ps}}\\
q &= \frac{1064\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{1855\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}\\
q &= 0{,}07
\end{aligned}$$

(c) Cálculo de la presión parcial en los dos niveles, e_0 y e_1:

- Calculamos en primer lugar la proporción de mezcla, m, que es constante durante todo el ascenso:

$$\begin{aligned} q &= \frac{m}{m+1} \\ m &= \frac{q}{1-q} \\ m &= \frac{0{,}07}{1-0{,}07} \\ m &= 0{,}075 \end{aligned}$$

- Para finalizar, obtenemos e de la expresión de la proporción de mezcla:

$$\begin{aligned} m &= \epsilon \cdot \frac{e}{P-e} \\ e &= \frac{m \cdot P}{\epsilon + m} \\ e_0 = \frac{m \cdot P_0}{\epsilon + m} &= \frac{0{,}075 \cdot 1024\,\text{hPa}}{0{,}622 + 0{,}075} \\ e_0 &= 110{,}2\,\text{hPa} \\ e_1 = \frac{m \cdot P_1}{\epsilon + m} &= \frac{0{,}075 \cdot 752{,}4\,\text{hPa}}{0{,}622 + 0{,}075} \\ e_1 &= 81{,}0\,\text{hPa} \end{aligned}$$

---

55. Determínese la temperatura virtual del aire a 3000 m de altura sobre la superficie del mar, sabiendo que a nivel del mar $T_0 = 10°C$ y el gradiente vertical de temperatura $\alpha = 0{,}6°C/100$ m. Considere que a 3000 m la tensión de vapor es 1,12 mb menor que la tensión de saturación.

Solución:

- En primer lugar calculamos la temperatura del aire a los 3000 m de altura:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - \alpha z \\ T &= 283\,\text{K} - 0{,}006\,\text{K/m} \cdot 3000\,\text{m} \\ T &= 265\,\text{K} \end{aligned}$$

- A continuación calculamos la tensión de saturación del vapor de agua para dicha temperatura, utilizando la fórmula de Magnus:

$$\begin{aligned} E(T°C) &= 6{,}1 \cdot 10^{\frac{7{,}45\,T°C}{234{,}07 + T}}\ \text{hPa} \\ E(-8°C) &= 6{,}1 \cdot 10^{\frac{7{,}45 \cdot (-8°C)}{234{,}07 - 8°C}}\ \text{hPa} \\ E(-8°C) &= 3{,}32\,\text{hPa} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la presión parcial del vapor de agua, e, será:

$$\begin{aligned} e &= E - 1{,}12\,\text{hPa} \\ e &= 3{,}32\,\text{hPa} - 1{,}12\,\text{hPa} \\ e &= 2{,}20\,\text{hPa} \end{aligned}$$

- Calculamos la proporción de mezcla, m, y posteriormente la humedad específica, q:

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon \cdot \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\ \mathrm{m} &= 0{,}622 \cdot \frac{2{,}20\,\mathrm{hPa}}{700\,\mathrm{hPa} - 2{,}20\,\mathrm{hPa}} \\ \mathrm{m} &= 1{,}96\,10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\ \mathrm{q} &= \frac{1{,}96\,10^{-3}}{1{,}96\,10^{-3} + 1} \\ \mathrm{q} &= 1{,}95\,10^{-3} \end{aligned}$$

- Ya estamos en disposición de calcular la temperatura virtual, la cual vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5}\mathrm{q} + 1\right)\mathrm{T} \\ \mathrm{T}_v &= \left(\frac{3}{5} \cdot 1{,}95\,10^{-3} + 1\right) 265\,\mathrm{K} \\ \mathrm{T}_v &= 265{,}3\,\mathrm{K} = -\,7{,}7^{\circ}\mathrm{C} \end{aligned}$$

---

56. Para una atmósfera que contiene un 2 % (en volumen) de vapor de agua, calcúlese el valor de $\overline{\gamma}$ y de $\overline{\Gamma}$.

Solución:

- Por definición, que la proporción de vapor de agua sea del 2 % en volumen significa que,

$$\frac{\mathrm{V}_a}{\mathrm{V}_T} = 0{,}02$$

donde V_a es el volumen de vapor de agua y V_T es el volumen total. Se considera en tdo momento que ambas especies se encuentran a idéntica presión.

(a) Cálculo de $\overline{\gamma}$:

- La ecuación general de los gases ideales es $\mathrm{P} = \rho\,\mathrm{r}\,\mathrm{T}$. De esta manera, para la masa de aire y para el vapor la agua, dicha expresión será (de nuevo por definición):

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = \frac{\mathrm{m}_T}{\mathrm{V}_T}\,\bar{\mathrm{r}}\,\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{P}\,\mathrm{V}_T &= \mathrm{m}_T\,\bar{\mathrm{r}}\,\mathrm{T} \text{ (para la masa de aire)} \\ \mathrm{P} = \frac{\mathrm{m}_a}{\mathrm{V}_a}\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{P}\,\mathrm{V}_a &= \mathrm{m}_a\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T} \text{ (para el vapor de agua)} \end{aligned}$$

- Al dividir ambas expresiones, nos quedaría la siguiente expresión:

$$\frac{\mathrm{V}_a}{\mathrm{V}_T} = \mathrm{q}\,\frac{\mathrm{r}_a}{\overline{\mathrm{r}}}$$
$$\frac{\mathrm{V}_a}{\mathrm{V}_T} = \mathrm{q}\,\frac{\mathrm{r}_a}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{q} + \mathrm{r}_s(1 - \mathrm{q})}$$

- Despejamos la humedad específica y obtenemos su valor:

$$\mathrm{q} = \frac{\mathrm{V}_a\,\mathrm{r}}{\mathrm{V}_T\,\mathrm{r}_a + \mathrm{V}_a\,\mathrm{r} - \mathrm{V}_a\,\mathrm{r}_a}$$
$$\mathrm{q} = \frac{0{,}02\,\mathrm{m}^3 \cdot 287\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{1\,\mathrm{m}^3 \cdot 461\,\mathrm{J/(kg\,K)} + 0{,}02\,\mathrm{m}^3 \cdot 287\,\mathrm{J/(kg\,K)} - 0{,}02\,\mathrm{m}^3 \cdot 461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}$$
$$\mathrm{q} = 0{,}0125$$

- Ya podemos calcular $\overline{\gamma}$:

$$\overline{\gamma} = \frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{c}_v}}$$
$$\overline{\gamma} = \frac{\mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q})}{\mathrm{c}_{va}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{vs}(1 - \mathrm{q})}$$
$$\overline{\gamma} = \frac{1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}0125 + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 0{,}0125)}{1395{,}2\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}0125 + 718\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 0{,}0125)}$$
$$\overline{\gamma} = 1{,}398,$$

donde hemos usado la relación $c_p = c_v + r$.

(b) Cálculo de $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma} = \frac{\mathrm{g}}{\overline{\mathrm{c}_p}}$$
$$\overline{\Gamma} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_{pa} \cdot \mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q})}$$
$$\overline{\Gamma} = \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s}^2}{1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}0125 + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 0{,}0125)}$$
$$\overline{\Gamma} = 9{,}65\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$$

---

57. ¿Cómo influye la humedad en la estabilidad de la estratificación?. Razona cuál de los siguientes estados de la atmósfera a una altura dada $z = 0$ sería más estable:

(Un estado atmóferico se dice **más estable** que otro cuando la oposición que ofrece a desplazamientos verticales de masas de aire es mayor que la de ese otro. Hágase la hipótesis de linealidad del gradiente vertical de temperatura. Datos: $c_p(\mathrm{va})/c_p(\mathrm{as}) = 1{,}85$.)

(a) Se tiene que en el nivel de referencia $T(0) = 23°$C, a una altura $z = 100$ m, $T(100) = 22{,}2°$C; la humedad específica es $q = 0{,}3$.
(b) Se tiene que en el nivel de referencia $T(0) = 33°$C, a una altura $z = 100$ m, $T(100) = 32{,}2°$C; la humedad específica es $q = 0{,}1$.
(c) Se tiene que en el nivel de referencia $T(0) = 23°$C, a una altura $z = 100$ m, $T(100) = 22{,}2°$C; la humedad específica es $q = 0{,}01$.

Solución:

Para cuantificar la estabilidad de una masa de aire debe emplearse la definición de índice de estabilidad:

$$\eta = \mathrm{g}\,\frac{\overline{\Gamma} - \alpha}{\mathrm{T'}}$$

(a) Caso a: T(0) = 23ºC; z = 100m; T(100) = 22,2ºC y q = 0,3.

- En primer lugar, calculamos α a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathrm{T}'_0 - \mathrm{T}'}{\mathrm{z}} \\
\alpha &= \frac{296\,\mathrm{K} - 295{,}2\,\mathrm{K}}{100\,\mathrm{m}} \\
\alpha &= 0{,}008\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos $\overline{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q})} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}3 + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 0{,}3)} \\
\overline{\Gamma} &= 7{,}7\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Como $\alpha > \overline{\Gamma}$, la atmósfera se encuentra en situación de inestabilidad.
- El índice de estabilidad será:

$$\eta = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\,\frac{(7{,}7\,10^{-3} - 8\,10^{-3})\mathrm{K/m}}{296\mathrm{K}} = -9{,}9\,10^{-6}\,\mathrm{s^{-2}}$$

(b) Caso b: T(0) = 33ºC; z = 100m; T(100) = 32,2ºC y q = 0,1.

- En primer lugar, calculamos α a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathrm{T}'_0 - \mathrm{T}'}{\mathrm{z}} \\
\alpha &= \frac{306\,\mathrm{K} - 305{,}2\,\mathrm{K}}{100\,\mathrm{m}} \\
\alpha &= 0{,}008\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos $\overline{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q})} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}1 + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 0{,}1)} \\
\overline{\Gamma} &= 8{,}98\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Como $\overline{\Gamma} > \alpha$, la atmósfera se encuentra en situación de estabilidad.
- El índice de estabilidad será:

$$\eta = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\frac{(8{,}98\,10^{-3} - 8\,10^{-3})\mathrm{K/m}}{306\mathrm{K}} = 3{,}14\,10^{-5}\,\mathrm{s^{-2}}$$

(c) Caso C: T(0) = 23°C; z = 100m; T(100) = 22,2°C y q = 0,01.

- En primer lugar, calculamos α a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathrm{T}'_0 - \mathrm{T}'}{\mathrm{z}} \\
\alpha &= \frac{296\,\mathrm{K} - 295{,}2\,\mathrm{K}}{100\,\mathrm{m}} \\
\alpha &= 0{,}008\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos $\overline{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q})} \\
\overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}01 + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 0{,}01)} \\
\overline{\Gamma} &= 9{,}6\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- La atmósfera se encuentra en situación de estabilidad.
- El índice de estabilidad será:

$$\eta = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\frac{(9{,}2\,10^{-3} - 8\,10^{-3})\mathrm{K/m}}{296\mathrm{K}} = 5{,}30\,10^{-6}\,\mathrm{s^{-2}}$$

CONCLUSIÓN: Atendiendo al valor del índice de estabilidad, la situación (c) es más estable que la (b) y ésta más que la situación (a). Ello se debe a la relación entre la humedad específica y la estabilidad de estratificación; es decir, cuanto menor es la humedad específica, mayor es $\overline{\Gamma}$ y por lo tanto, mayor es la estabilidad.

---

58. Calcúlese el coeficiente de enfriamiento adiabático del aire húmedo si la presión es de 900 mb, la humedad relativa es h = 80 % y T = 300 K.

    Dato: E(300 K)=26,6 mmHg.

    Solución:

    - En primer lugar calculamos la presión parcial del vapor de agua a partir de la humedad relativa:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{h\,E}}{100} \\ \mathrm{e} &= \frac{80 \cdot \left(26{,}6\,\mathrm{mmHg} \cdot \frac{1\,\mathrm{atm}}{760\,\mathrm{mmHg}} \cdot \frac{1013{,}25\,\mathrm{mb}}{1\,\mathrm{atm}}\right)}{100} \\ \mathrm{e} &= 28{,}4\,\mathrm{mb} \end{aligned}$$

    - A continuación calculamos la proporción de mezcla (m) y la humedad específica (q):

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\ \mathrm{m} &= 0{,}622 \cdot \frac{28{,}4\,\mathrm{mb}}{900\,\mathrm{mb} - 28{,}4\,\mathrm{mb}} \\ \mathrm{m} &= 0{,}020 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\ \mathrm{q} &= \frac{0{,}020}{0{,}020 + 1} \\ \mathrm{q} &= 0{,}019 \end{aligned}$$

    - Por último, procedemos a realizar el cálculo de $\overline{\Gamma}$, el cual resulta de la aplicación del primer principio de la termodinámica:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_p} \\ \overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}\,(1 - \mathrm{q})} \\ \overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 0{,}019 + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,(1 - 0{,}019)} \\ \overline{\Gamma} &= 9{,}6\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Termodinámica del aire saturado

3.1. Fórmulas de interés

3.1.1. Humedad relativa

El índice de humedad que mejor caracteriza el estado de la atmósfera en procesos de condensación es la *humedad relativa*,

$$h = 100 \frac{e}{E(T)} \ , \tag{3.1}$$

donde e es la presión parcial de vapor de agua y $E(T)$ es la tensión de saturación del vapor de agua a la temperatura T. La ley de Dalton nos dirá que esa tensión de saturación equivale a la presión parcial máxima de vapor de agua, antes de que se inicie la condensación, que admitirá cualquier mezcla de gases, supuestos ideales, como el aire atmosférico.

En términos de la humedad absoluta, a (definida como masa de vapor de agua por unidad de volumen) o de la proporción de mezcla, m, se tendrá:

$$h = 100 \frac{m}{M(T,P)} = 100 \frac{a}{A(T,P)} \ , \tag{3.2}$$

donde $M(T,P)$ y $A(T,P)$ serán, respectivamente, las proporciones de mezcla y humedades absolutas *saturantes*.

3.1.2. Ecuación de Clausius-Clapeyron

La variación con la temperatura de la *tensión de saturación* viene dada por la ecuación de **Clausius-Clapeyron**

$$\frac{dE}{dT} = \frac{LE}{r_a T^2} \ , \tag{3.3}$$

donde $L = 2500$ J/g $= 600$ cal/g. Si se integra dicha ecuación,

$$\ln \frac{E}{E_0} = \frac{L}{r_a} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{h}{h_0} = \frac{L}{r_a} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \ , \tag{3.4}$$

puede determinarse la *temperatura de rocío*, T_r,

$$T_r = \frac{1}{\dfrac{1}{T_0} + \dfrac{r_a}{L} \ln \dfrac{100}{h_0}} \ , \tag{3.5}$$

que se define como la temperatura hasta la que hay que enfriar isobáricamente el aire para que se inicie la condensación del vapor de agua.

La ecuación de **Clausius-Clapeyron**, aunque teóricamente fundamentada, es desafortunadamente una buena aproximación sólo para pequeñas variaciones de temperatura. En cambio, la *fórmula de Magnus*,

$$E(T) = 6{,}1 \times 10^{\dfrac{7{,}45T(^\circ\mathrm{C})}{234{,}07+T(^\circ\mathrm{C})}} \; (\mathrm{hPa}) \; , \tag{3.6}$$

es una expresión puramente empírica pero que proporciona una buena aproximación a la tensión de saturación del vapor de agua en un amplio rango de temperaturas.

3.1.3. Elevación adiabática

Usando de nuevo el **primer principio de la Termodinámica** y la ecuación de **Claussius-Clapeyron**, obtendremos:

$$\frac{dh}{h} = \frac{de}{e} - \frac{dE}{E} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dh}{dT} = \frac{h}{T}\left(\frac{\overline{c}_p}{\overline{r}} - \frac{L}{r_a T}\right) \; . \tag{3.7}$$

Ecuación que expresa la variación de la humedad relativa de una masa de aire a lo largo de un proceso de elevación adiabática en la atmósfera.

Mediante la integración exacta de (3.7) obtenemos

$$\ln\frac{h}{h_0} = \frac{\overline{c}_p}{\overline{r}}\ln\frac{T}{T_0} + \frac{\epsilon L}{r_s}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) \; ; \tag{3.8}$$

una ecuación que para su solución precisaría de la aproximación

$$\ln\frac{T}{T_0} = \ln\left(1 + \frac{T-T_0}{T_0}\right) \simeq \frac{T-T_0}{T_0} \; , \tag{3.9}$$

para obtener una expresión analítica de la temperatura en función de la humedad. Dicha aproximación permitiría, conocida la humedad a cualquier altura, deducir la temperatura resolviendo una ecuación algebraica de segundo grado.

También es posible considerar constante e igual a T_0 la temperatura en el segundo factor de (3.7),

$$\frac{\overline{c}_p}{\overline{r}} - \frac{L}{r_a T} \simeq \frac{\overline{c}_p}{\overline{r}} - \frac{L}{r_a T_0} \tag{3.10}$$

siendo así una solución aproximada de dicha ecuación:

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\dfrac{\overline{c}_p}{\overline{r}} - \dfrac{\epsilon L}{r_s T_0}} \; . \tag{3.11}$$

En este caso se puede invertir fácilmente la ecuación y escribir la temperatura en función de la humedad y viceversa.

Si se resuelve la ecuación (3.8) ó (3.11) para un valor de la humedad relativa $h = 100\,\%$ se obtendría la temperatura de saturación por ascenso adiabático.

3.1.4. Nivel de condensación

El nivel de condensación es aquel al que deberá ascender adiabáticamente una masa de aire en la atmósfera hasta que el vapor de agua inicie su condensación. De este modo, la Temperatura, T_s, de la masa de aire en dicho nivel de condensación será:

$$T_s = T_0 \left(\frac{100}{h_0} \right)^{\frac{1}{\xi}} \tag{3.12}$$

donde

$$\xi = \frac{\overline{c}_p}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r_s T_0} \simeq \frac{c_p(s)}{r_s} - \frac{\epsilon L}{r_s T_0} \ . \tag{3.13}$$

La altura, z_s, del nivel de condensación puede aproximarse por

$$z_s \simeq \frac{T_0 - T_s}{\Gamma} = \frac{T_0}{\Gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{100}{h_0} \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \ . \tag{3.14}$$

Otras expresiones aproximadas para derivar la altura del nivel de condensación son:

Fórmula de Ferrel:

$$z_s = 122(T_0 - T_r) \ \ (m) \tag{3.15}$$

donde T_r es el punto de rocío;

Fórmula de Väisälä

$$z_s = 188\,(T(^\circ\mathrm{C}) + 105)\,\frac{x}{x + 5{,}1} \ , \qquad x = \log_{10} \frac{100}{h_0} \ . \tag{3.16}$$

3.1.5. Elevación pseudo-adiabática

Una vez alcanzado el nivel de condensación, la propia condensación del vapor de agua supone una fuente de calor durante la ascensión. Si se considera que las gotas de agua que se forman quedan aisladas térmicamente del aire húmedo saturado (aproximación *pseudo-adiabática*), la ecuación que describirá la evolución vertical, análoga a (2.7), será:

$$-LdM \simeq c_p dT - VdP \ , \tag{3.17}$$

y el *coeficiente de enfriamiento pseudo-adiabático* se escribirá como sigue:

$$-\frac{dT}{dz} = \Gamma_{\mathrm{pseud}} = \gamma \frac{P + \epsilon \dfrac{LE}{RT}}{P + \epsilon \dfrac{L}{c_p} \dfrac{dE}{dT}} \tag{3.18}$$

3.1.6. Algunas definiciones útiles

Temperatura equivalente: Se define para una masa de aire húmedo como la temperatura que alcanzaría si condensara todo el vapor de agua de la mezcla y el calor generado se invirtiera en calentar el aire seco resultante.

$$T_e = T + \frac{mL}{c_p(s)} \simeq T + 2e(\mathrm{mmHg}) \simeq \mathrm{T} + 2\mathrm{a}\left(\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}\right) \ . \tag{3.19}$$

Temperatura del termómetro húmedo: Se define la temperatura del termómetro húmedo, T', como aquella temperatura que alcanza un termómetro cuyo bulbo está rodeado por una fina película de agua líquida para que la evaporación de dicha agua sature un flujo continuo de aire, en contacto y en equilibrio térmico con el bulbo del termómetro.

$$(c_p(s) + mc_p(a))(T - T') = L(M' - m) \tag{3.20}$$

La relación con la temperatura equivalente será,

$$T_e \simeq T' + \frac{M'L}{c_p(s)} \simeq T' + 2A \tag{3.21}$$

3.2. Problemas resueltos

59. Una masa de aire húmedo está localizada en el suelo y tiene una temperatura de 20° C. En un ascenso adiabático alcanza la saturación en el nivel de 800 mb. Determínese el punto de rocío si la presión en el suelo es de 1000 mb.

    Solución:

    - En primer lugar calculamos la temperatura de saturación correspondiente a dicha presión de saturación. Para ello aplicamos una de las ecuaciones de Poisson para un proceso adiabático:

$$\begin{aligned}
\frac{T_1^\gamma}{T_2^\gamma} &= \frac{P_1^{\gamma-1}}{P_2^{\gamma-1}} \\
T_2 &= T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
T_2 &= 293\,\mathrm{K}\left(\frac{800\,\mathrm{mb}}{1000\,\mathrm{mb}}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} \\
T_2 &= 274{,}9\,\mathrm{K} = T_S
\end{aligned}$$

    - A continuación calculamos la humedad correspondiente al nivel del suelo, h_0, mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{h_0} &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r\,T_0}} \\
h_0 &= \frac{h}{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r\,T_0}}}
\end{aligned}$$

realizando la siguiente aproximación $\overline{c_p} \approx c_p(s)$ y $\overline{r} \approx r_s$ obtenemos

$$\begin{aligned}
h_0 &= \frac{100}{\left(\frac{274{,}9\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622\cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 293\,\mathrm{K}}}} \\
h_0 &= 38{,}26\,\%
\end{aligned}$$

    - Estamos ya en disposición de calcular la temperatura de rocío, T_r, la cual viene dada según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{h}{h_0} &= \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_0}\right) \\
T_r &= \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{r_a}{L}\ln\frac{100}{h_0}} \\
T_r &= \frac{1}{\frac{1}{293\,\mathrm{K}} + \frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}\ln\frac{100}{38{,}26}} \\
T_r &= 278{,}6\,\mathrm{K} = 5{,}6°\mathrm{C}
\end{aligned}$$

---

60. Calcúlese la variación de tensión saturante del vapor de agua cuando su temperatura pasa de 273 K a 265 K.

Solución:

- Usamos la fórmula de Magnus para calcular la tensión saturante de ambas temperaturas:

$$E(T°C) = 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45\,T(°C)}{234{,}07\,+\,T(°C)}}\,\text{hPa}$$

(Téngase en cuenta que podría haberse empleado la ecuación de Clausius-Clapeyron $\Delta E \approx \frac{L\,E}{r_a T^2}\,\Delta T$)

(a) Tensión de saturación para $T_0 = 273$ K

$$\begin{aligned} E_0 &= 6{,}1\;10^{\frac{7{,}45\cdot 0}{234{,}07\,+\,0}}\,\text{hPa} \\ E_0 &= 6{,}1\,\text{hPa} \end{aligned}$$

(b) Tensión de saturación para $T = 265$ K

$$\begin{aligned} E &= 6{,}1\;10^{\frac{7{,}45\cdot(-8)}{234{,}07\,-\,8}}\,\text{hPa} \\ E &= 3{,}32\,\text{hPa} \end{aligned}$$

- Así pues, la variación de tensión saturante de vapor de agua es:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 3{,}32\,\text{hPa} - 6{,}1\,\text{hPa} \\ \Delta E &= -2{,}77\,\text{hPa} \end{aligned}$$

---

61. Un masa de aire húmedo se encuentra en el suelo con una temperatura de 15°C, una humedad relativa del 80 % y una presión de 1000 hPa. Si esta masa de aire asciende adiabáticamente hasta una presión de 980 hPa, determínese para ese nivel: (a) temperatura, (b) humedad específica, (c) tensión máxima de vapor, (d) temperatura del punto de rocío. Nota: es necesario emplear la fórmula de Magnus o una tabla donde aparezcan las tensiones saturantes en función de la temperatura.

Solución:

(a) Temperatura para el nivel de presión de 980 hPa, (T_1):

- Utilizamos una de las ecuaciones de Poisson para los ascensos adiabáticos (nótese que vamos a realizar la aproximación $\gamma \approx \overline{\gamma}$ aunque al conocer la humedad relativa podría calcularse sin dificultad $\overline{\gamma}$ y resolver el problema de forma recursiva):

$$\begin{aligned}
\frac{T_0^\gamma}{T_1^\gamma} &= \frac{P_0^{\gamma-1}}{P_1^{\gamma-1}} \\
T_1 &= T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
T_1 &= 288\,\mathrm{K} \left(\frac{980\,\mathrm{hPa}}{1000\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\
T_1 &= 286,3\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

(b) Humedad específica para el nivel de presión de 980 hPa, q,

- La humedad específica permanece constante siempre que no haya condensación, por lo tanto, q será idéntica en ambos niveles.
- Calculamos en primer lugar la tensión saturante del vapor de agua en el nivel inferior, es decir, la correspondiente a 15°C:

$$\begin{aligned}
E(15°C) &= 6,1\,10^{\frac{7,45 \cdot 15°C}{234,07 + 15°C}}\,\mathrm{hPa} \\
E(15°C) &= 17,14\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos la presión parcial del vapor de agua (e):

$$\begin{aligned}
h &= \frac{e}{E}\,100 \\
e &= \frac{h\,E}{100} \\
e &= \frac{80 \cdot 17,14\,\mathrm{hPa}}{100} \\
e &= 13,71\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

- Calculamos la proporción de mezcla, m y por último la humedad específica, q:

$$\begin{aligned}
m &= \epsilon\,\frac{e}{P - e} \\
m &= 0,622 \cdot \frac{13,71\,\mathrm{hPa}}{1000\,\mathrm{hPa} - 13,71\,\mathrm{hPa}} \\
m &= 8,65\,10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q &= \frac{m}{m + 1} \\
q &= \frac{8,65\,10^{-3}}{8,65\,10^{-3} + 1} \\
q &= 8,57\,10^{-3}
\end{aligned}$$

(c) Tensión máxima de vapor para dicho nivel, E:

- Calculamos E para T = 286,3 K = 13,3°C aplicando la fórmula de Magnus:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(13{,}3°\mathrm{C}) &= 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45\cdot 13{,}3(°\mathrm{C})}{234{,}07\,+\,13{,}3(°\mathrm{C})}}\,\mathrm{hPa} \\ \mathrm{E}(13{,}3°\mathrm{C}) &= 15{,}4\,\mathrm{hPa} \end{aligned}$$

(d) Temperatura de rocío para el nivel de presion de 980 hPa, T_r:

- Despejamos T_r de la siguiente expresión teniendo encuenta que en este nivel la humedad relativa vale $h = 100 \cdot (980/1000) \cdot 13{,}71/15{,}4 = 87{,}2\,\%$, donde hemos empleado el teorema de las expansiones relativas:

$$\begin{aligned} \ln\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}_0} &= \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}_a}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_r} - \frac{1}{\mathrm{T}_0}\right) \\ \mathrm{T}_r &= \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{T}_0} + \frac{\mathrm{r}_a}{\mathrm{L}}\ln\frac{100}{\mathrm{h}_0}} \\ \mathrm{T}_r &= \frac{1}{\frac{1}{286{,}3\,\mathrm{K}} + \frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}\ln\frac{100}{87{,}2}} \\ \mathrm{T}_r &= 284{,}3\,\mathrm{K} = 11{,}3°\mathrm{C} \end{aligned}$$

---

62. Determínense el nivel de condensación por ascenso adiabático de una masa de aire sabiendo que la temperatura en el suelo es de 22°C y su punto de rocío es de 15°C. Utilizar la fórmula de Magnus si fuera necesario.

Solución:

- Para comenzar calculamos la humedad relativa a nivel del suelo:

$$\begin{aligned} \ln\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}_0} &= \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}_a}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_r} - \frac{1}{\mathrm{T}_0}\right) \\ \mathrm{h}_0 &= \frac{100}{e^{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}_a}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{T}_r} - \frac{1}{\mathrm{T}_0}\right)}} \\ \mathrm{h}_0 &= \frac{100}{e^{\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}\cdot\left(\frac{1}{288\,\mathrm{K}} - \frac{1}{295\,\mathrm{K}}\right)}} \\ \mathrm{h}_0 &= 63{,}85\,\% \end{aligned}$$

- A continuación calculamos la temperatura de saturación por ascenso adiabático,

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{h_0} &= \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r_s T_0}} \\
T_s &= T_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{\frac{\overline{c_p}}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r_s T_0}}}
\end{aligned}
$$

Realizando la siguiente aproximación: $\overline{c_p} \approx c_p$ y $\overline{r} \approx r_s$; y sustituyendo obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
T_s &= 295\,K \left(\frac{100}{63{,}85}\right)^{\frac{1}{\frac{1005\,J/(kg\,K)}{287\,J/(kg\,K)} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\,10^6\,J/kg}{287\,J/(kg\,K)\cdot 295\,K}}} \\
T_s &= 286{,}3\,K
\end{aligned}
$$

- Por último procedemos a calcular dicho nivel de condensación mediante la siguiente expresión:

$$
T = T_0 - \frac{T_0}{T_0'}\Gamma z
$$

Supondremos que $\frac{T_0}{T_0'} \approx 1$ y que $\Gamma = 9{,}75\,10^{-3}$ K/m (en este caso también podría calcularse $\overline{\Gamma}$)

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{T_0 - T}{\Gamma} \\
z &= \frac{295\,K - 286{,}3\,K}{9{,}75\,10^{-3}\,K/m} \\
z &= 892\,m
\end{aligned}
$$

---

63. Un masa de aire húmedo tiene una tensión de vapor de 17,94 hPa y una temperatura de 20°C. Sabiendo que la tensión saturante a 20°C es de 23,38 hPa, determine la humedad relativa y el punto de rocío.

Solución:

- En primer lugar calculamos la humedad relativa, la cual viene dada mediante la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{e}{E}100 \\
h &= \frac{17{,}94\,hPa}{23{,}38\,hPa}\cdot 100 \\
h &= 77\,\%
\end{aligned}
$$

- A continuación calculamos la temperatura de rocío, la cual se obtiene de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\ln\frac{100}{h_0} &= \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_0}\right)\\
T_r &= \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{r_a}{L}\ln\frac{100}{h_0}}\\
T_r &= \frac{1}{\frac{1}{293\,K} + \frac{461\,J/(kg\,K)}{2{,}51\,10^6\,J/kg}\ln\frac{100}{77}}\\
T_r &= 288{,}9\,K = 15{,}9°C
\end{aligned}$$

---

64. Supongamos que la masa de aire húmedo del problema anterior sufre un incremento de temperatura de 5°C en un proceso isobárico. Determínese la variación que experimenta la humedad relativa de la masa de aire.

Solución:

- Calculamos en primer lugar la tensión saturante correspondiente a T = 25°C mediante la fórmula de Magnus:

$$\begin{aligned}
E(25°C) &= 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45\cdot 25°C}{234{,}07\,+\,25°C}}\,hPa\\
E(25°C) &= 31{,}93\,hPa
\end{aligned}$$

- La nueva humedad relativa (h) será:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{e}{E}100\\
h &= \frac{17{,}94\,hPa}{31{,}93\,hPa}100\\
h &= 56{,}18\,\%
\end{aligned}$$

- Así pues, la variación de la humedad relativa (Δh) será:

$$\begin{aligned}
\Delta h &= h_2 - h_1\\
\Delta h &= 56{,}18 - 77\\
\Delta h &= -20{,}8\,\%
\end{aligned}$$

---

65. Calcúlese el cambio que experimenta la tensión de saturación del vapor de agua si la temperatura experimenta un aumento de 8°C, pasando de 5°C a 13°C.

Dato: E(5°C)=8,73 hPa.

Solución:

(a) Cálculo de ΔE mediante la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dT}} &= \frac{\mathrm{L\,E}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}^2}\\
\frac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta \mathrm{T}} &= \frac{\mathrm{L\,E}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}^2}\\
\Delta \mathrm{E} &= \frac{\mathrm{L\,E}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}^2}\cdot \Delta \mathrm{T}\\
\Delta \mathrm{E} &= \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}\cdot 8{,}73\,\mathrm{hPa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 278^2\,\mathrm{K}^2}\cdot 8\,\mathrm{K}\\
\Delta \mathrm{E} &= 4{,}9\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

(b) Cálculo de ΔE mediante la fórmula de Magnus:

- Calculamos la tensión saturante correspondiente a T = 13°C y calculamos dicho incremento:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(13°\mathrm{C}) &= 6{,}1\,10^{\dfrac{7{,}45\cdot 13°\mathrm{C}}{234{,}07\,+\,13°\mathrm{C}}}\,\mathrm{hPa}\\
\mathrm{E}(13°\mathrm{C}) &= 15{,}04\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{E} &= \mathrm{E} - \mathrm{E}_0\\
\Delta \mathrm{E} &= 15{,}04\,\mathrm{hPa} - 8{,}73\,\mathrm{hPa}\\
\Delta \mathrm{E} &= 6{,}3\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

---

66. Una nube saturada de vapor experimenta un incremento de temperatura de 4°C a 10°C. En el proceso, parte de las gotas que forman la nube se evaporan para mantener el ambiente saturado. Determínese el incremento de la tensión de vapor, sabiendo que E(4°C)=8,14 hPa.

Solución:

- Calculamos la tensión saturante para T=10 °C mediante la fórmula de Magnus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(10°\mathrm{C}) &= 6{,}1\,10^{\dfrac{7{,}45\cdot 10°\mathrm{C}}{234{,}07\,+\,10°\mathrm{C}}}\,\mathrm{hPa}\\
\mathrm{E}(10°\mathrm{C}) &= 12{,}32\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

- El incremento de la tensión de vapor será:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{E} &= 12{,}32\,\mathrm{hPa} - 8{,}14\,\mathrm{hPa}\\
\Delta \mathrm{E} &= 4{,}18\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

NOTA: Esta variación de la tensión saturante también puede obtenerse mediante la ecuación de Clausius-Clapeyron.

---

67. Determine el vapor de agua que se condensará si enfriamos una masa de aire saturado desde 10°C a 8°C manteniendo la presión constante, $P_0 = 1013$ hPa.

Datos: E(10°C)=12,26 hPa, E(8°C)=10,71 hPa.

Solución:

- Al tratarse de aire saturado, la proporción de mezcla vendrá dada mediante la siguiente expresión:

$$\mathrm{M} = \epsilon \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{P} - \mathrm{E}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1 &= 0{,}622 \frac{12{,}26\,\mathrm{hPa}}{1013\,\mathrm{hPa} - 12{,}26\,\mathrm{hPa}} \\ \mathrm{M}_1 &= 7{,}62\,10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_2 &= 0{,}622 \frac{10{,}71\,\mathrm{hPa}}{1013\,\mathrm{hPa} - 10{,}71\,\mathrm{hPa}} \\ \mathrm{M}_2 &= 6{,}65\,10^{-3} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la cantidad de vapor de agua que se condensará será:

$$\begin{aligned} \Delta\mathrm{M} &= \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_2 \\ \Delta\mathrm{M} &= 7{,}62\,10^{-3} - 6{,}65\,10^{-3} \\ \Delta\mathrm{M} &= 9{,}7\,10^{-4} = 0{,}97\,\mathrm{g/kg} \end{aligned}$$

---

68. Calcúlese el calor latente de condensación del agua a 30°C, sabiendo que E(30°C)=42 hPa y que dE/dT ≈ 2,4 hPa/K. Compruébese el resultado con otra ecuación más aproximada.

Solución:

(a) Cálculo del calor latente (L) mediante la ecuación de Clasius-Clapeyron:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dT}} &= \frac{\mathrm{L\,E}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}^2} \\ \mathrm{L} &= \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dT}} \cdot \frac{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}^2}{\mathrm{E}} \\ \mathrm{L} &= 2{,}4\,\mathrm{hPa/K}\,\frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 303^2\,\mathrm{K}^2}{42\,\mathrm{hPa}} \\ \mathrm{L} &= 2{,}418\,10^6\,\mathrm{J/kg} \end{aligned}$$

(b) Cálculo del calor latente (L) mediante la fórmula aproximada:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &= \mathrm{L_0} + (\mathrm{c}_p(a) - \mathrm{c})\mathrm{T}(°C) \approx 600 - 0{,}56 \cdot \mathrm{T}(°\mathrm{C})\,\mathrm{cal/g} \\ \mathrm{L} &= 600 - 0{,}56 \cdot 30 = 583{,}2\,\mathrm{cal/g} = 2{,}437\,10^6\,\mathrm{J/kg} \end{aligned}$$

---

69. Dado un estrato de aire bien mezclado, calcúlese:

   (a) La temperatura de saturación.
   (b) El gradiente adiabático en la base del estrato.
   (c) El punto de rocío en la base del estrato.
   (d) Altura (sobre la base) del nivel de condensación.
   (e) El nivel de condensación por la fórmula de Ferrel y por la de Väissälä.

   Datos: $h_0 = 60\,\%$, $T_0 = 280$K y $P_0 = 900$ hPa.

   Solución:

   (a) Para el cálculo de la temperatura de saturación (T_s):

   - Suponemos que sufre un ascenso adiabático, por lo que T_s se obtendrá a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{100}{\mathrm{h_0}} &= \left(\frac{\mathrm{T}_s}{\mathrm{T_0}}\right)^{\frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{r}}} - \frac{\epsilon\,\mathrm{L}}{\mathrm{r}\,\mathrm{T_0}}} \\ \mathrm{T}_s &= \mathrm{T_0}\left(\frac{100}{\mathrm{h_0}}\right)^{\frac{1}{\frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{r}}} - \frac{\epsilon\,\mathrm{L}}{\mathrm{r}\,\mathrm{T_0}}}} \end{aligned}$$

   Realizando la siguiente aproximación: $\overline{\mathrm{c}_p} \approx \mathrm{c}_p$ y $\overline{\mathrm{r}} \approx \mathrm{r}$; y sustituyendo obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_s &= 280\,\mathrm{K}\left(\frac{100}{60}\right)^{\frac{1}{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622\cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 280\,\mathrm{K}}}} \\ \mathrm{T}_s &= 271{,}1\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

   (b) Para el cálculo del gradiente adiabático en la base del estrato ($\overline{\Gamma}$):

   - En primer lugar calculamos la tensión saturante para T = 7°C mediante la fórmula de Magnus:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(7°\mathrm{C}) &= 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45\cdot 7(°\mathrm{C})}{234{,}07 + 7(°\mathrm{C})}}\,\mathrm{hPa} \\ \mathrm{E}(7°\mathrm{C}) &= 10{,}04\,\mathrm{hPa} \end{aligned}$$

   - La presión parcial del vapor de agua (e) en la base del estrato será:

$$\begin{aligned} \mathrm{h} &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}\,100 \\ \mathrm{e} &= \frac{\mathrm{h\,E}}{100} \\ \mathrm{e} &= \frac{10{,}04\,\mathrm{hPa}\cdot 60}{100} \\ \mathrm{e} &= 6{,}02\,\mathrm{hPa} \end{aligned}$$

- Calculamos la proporción de mezcla (m) y la humedad específica (q):

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \epsilon\,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\ \mathrm{m} &= 0{,}622\,\frac{6{,}02\,\mathrm{hPa}}{900\,\mathrm{hPa} - 6{,}02\,\mathrm{hPa}} \\ \mathrm{m} &= 4{,}19\,10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{q} &= \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m} + 1} \\ \mathrm{q} &= \frac{4{,}19\,10^{-3}}{4{,}19\,10^{-3} + 1} \\ \mathrm{q} &= 4{,}17\,10^{-3} \end{aligned}$$

- A continuación calculamos $\overline{\mathrm{c}_p}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{c}_p} &= \mathrm{c}_{pa}\,\mathrm{q} + \mathrm{c}_{ps}(1 - \mathrm{q}) \\ \overline{\mathrm{c}_p} &= 1860\,\mathrm{J/(kg\,K)}\,4{,}17\,10^{-3} + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 4{,}17\,10^{-3}) \\ \overline{\mathrm{c}_p} &= 1008{,}56\,\mathrm{J/(kg\,K)} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, el gradiente adiabático será el siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} &= \frac{\mathrm{g}}{\overline{\mathrm{c}_p}} \\ \overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1008{,}56\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \\ \overline{\Gamma} &= 9{,}72\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \end{aligned}$$

(c) Para el cálculo de la temperatura de rocío (T_r) en la base del estrato:

- Atendemos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln\frac{100}{\mathrm{h}_0} &= \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}_a}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_r} - \frac{1}{\mathrm{T}_0}\right) \\ \mathrm{T}_r &= \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{T}_0} + \frac{\mathrm{r}_a}{\mathrm{L}}\ln\frac{100}{\mathrm{h}_0}} \\ \mathrm{T}_r &= \frac{1}{\frac{1}{280\,\mathrm{K}} + \frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}\ln\frac{100}{60}} \\ \mathrm{T}_r &= 272{,}8\,\mathrm{K} = -0{,}2^{\circ}\mathrm{C} \end{aligned}$$

(d) Para el cálculo de la altura de condensación por ascenso adiabático:

- Atenderemos a la siguiente expresión:

$$\mathrm{T} \;=\; \mathrm{T_0} - \frac{\mathrm{T_0}}{\mathrm{T_0'}}\,\overline{\Gamma}\,\mathrm{z}$$

Empleando la aproximación $\mathrm{T_0/T_0'} \approx 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{z} &= \frac{\mathrm{T_0} - \mathrm{T}_s}{\overline{\Gamma}} \\ \mathrm{z} &= \frac{280\,\mathrm{K} - 271{,}1\,\mathrm{K}}{9{,}72\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}} \\ \mathrm{z} &= 915\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(e) Altura de condensación según Ferrel y Väissälä:

- Según la ecuación de Ferrel, la altura será:

$$\begin{aligned} \mathrm{z}_s &= 122\,(\mathrm{T_0} - \mathrm{T}_r)\,\mathrm{m} \\ \mathrm{z}_s &= 122\,(280\,\mathrm{K} - 272{,}8\,\mathrm{K})\,\mathrm{m} \\ \mathrm{z}_s &= 878{,}4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

- Según la ecuación de Väissällä, la altura será:

$$\begin{aligned} \mathrm{z}_s &= 188\,(\mathrm{T}(^\circ\mathrm{C}) + 105)\cdot\frac{\log\frac{100}{\mathrm{h_0}}}{\log\frac{100}{\mathrm{h_0}} + 5{,}1} \\ \mathrm{z}_s &= 188\,(7 + 105)\cdot\frac{\log\frac{100}{60}}{\log\frac{100}{60} + 5{,}1} \\ \mathrm{z}_s &= 877{,}75\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

---

70. La oscilación térmica de un día es de 10°C, mientras que la tensión de vapor sufre un cambio de 3 hPa durante dicho día. Sabiendo que la temperatura media es de 15°C y que la tensión de vapor media es de 10 hPa, determine la variación diurna de la humedad relativa teniendo en cuenta exclusivamente la influencia de la temperatura en primer lugar, y después sólo teniendo en cuenta la influencia de la variación de la tensión de vapor. Indique, según los resultados, qué parámetro es más importante en la predicción de la niebla.

Solución:

(a) Variación de $\frac{\Delta \mathrm{h}}{\mathrm{h}}$, teniendo en cuenta exclusivamente la influencia de la temperatura (e=cte):

- Partiendo de la definición de humedad relativa, tenemos que:

$$\mathrm{h} = 100\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{E}}$$

Tomamos logaritmos neperianos y posteriormente derivamos, manteniendo e constante:

$$\ln(h) = \ln(100) + \ln(e) - \ln(E)$$
$$d\ln(h) = -d\ln(E)$$
$$\frac{dh}{h} = -\frac{dE}{E}$$

- Atendiendo a la ecuación de Clasius-Clapeyron, sabemos que $dE/dT = LE/r_aT^2$, por lo que despejamos de la misma dE/E y sustituimos en la anterior.

$$\frac{dE}{E} = \frac{LdT}{r_aT^2}$$
$$\frac{dh}{h} = -\frac{L\,dT}{r_aT^2}$$

Si aproximamos $dh \approx \Delta h$ y $dT \approx \Delta T$, obtendremos

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{L\,\Delta T}{r_aT^2}$$
$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}\cdot 10\,\mathrm{K}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 288^2\,\mathrm{K}^2}$$
$$\frac{\Delta h}{h} = -0{,}65 \rightarrow \frac{\Delta h}{h} = 65\,\%$$

(b) Variación de $\frac{\Delta h}{h}$, teniendo en cuenta exclusivamente la influencia de la tensión de vapor (T=cte):

- Partiendo de la definición de humedad relativa, tenemos que:

$$\mathrm{h} = 100\frac{e}{E}$$

Tomamos logaritmos neperianos y posteriormente derivamos manteniendo E constante

$$\ln h = \ln(100)\ln e - \ln E$$
$$d\ln h = d\ln e$$
$$\frac{dh}{h} = \frac{de}{e}$$

Si integramos, nos quedará lo siguiente:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta e}{e}$$
$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{3\,\mathrm{hPa}}{10\,\mathrm{hPa}}$$
$$\frac{\Delta h}{h} = 0{,}3 \rightarrow \frac{\Delta h}{h} = 30\,\%$$

- NOTA: A la vista de estos resultados, el parámetro más importante en la predicción de la niebla es la temperatura.

---

71. Una masa de aire húmedo tiene una temperatura T = 20°C, una presión P = 1012 mb y una humedad relativa del 70 % y se supone que asciende adiabáticamente. Determínense en el nivel inicial y en el de condensación: la tensión de vapor, el punto de rocío y la proporción de mezcla.

Dato E(20°C)=23,38 hPa.

Solución:

(a) Cálculo de la tensión de vapor (e_0), punto de rocío (T_{r0}) y proporción de mezcla (m_0) en el nivel inicial:

- La tensión parcial se obtiene a partir de la humedad relativa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h &= \frac{e}{E}100 \\ e_0 &= \frac{E\,h}{100} \\ e_0 &= \frac{23{,}38\,\mathrm{hPa}\cdot 70}{100} \\ e_0 &= 16{,}4\,\mathrm{hPa} \end{aligned}$$

- La temperatura de rocío se obtendrá a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln\frac{h}{h_0} &= \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_0}\right) \\ T_{r0} &= \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{r_a}{L}\ln\frac{100}{h_0}} \\ T_{r0} &= \frac{1}{\frac{1}{293\,\mathrm{K}} + \frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}\ln\frac{100}{70}} \\ T_{r0} &= 287{,}5\,\mathrm{K} = 14{,}5°\mathrm{C} \end{aligned}$$

- La proporción de mezcla será:

$$\begin{aligned} m_0 &= \epsilon\frac{e}{P - e} \\ m_0 &= 0{,}622\cdot\frac{16{,}4\,\mathrm{hPa}}{1012\,\mathrm{hPa} - 16{,}4\,\mathrm{hPa}} \\ m_0 &= 1{,}024\,10^{-2} \end{aligned}$$

(b) Cálculo de la tensión de vapor, e, punto de rocío, T_r, y proporción de mezcla, m, en el nivel de condensación:

- En primer lugar calculamos la temperatura de saturación por ascenso adiabático, la cual, en el nivel de condensación, coincide con la temperatura de rocío,

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r T_0}}$$

$$T_s = T_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{\frac{\overline{c_p}}{\overline{r}} - \frac{\epsilon L}{r T_0}}}$$

En este caso, vamos a calcular de forma exacta $\overline{c_p}$ y $\overline{r}$ (nótese que q es constante en todo el ascenso):

$$\begin{aligned}
\overline{c_p} &= c_{pa}\, q + c_{ps}\, (1 - q) \\
\overline{c_p} &= 1860\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 1{,}014\, 10^{-2} + 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 1{,}014\, 10^{-2}) \\
\overline{c_p} &= 1013{,}67\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{r} &= r_a\, q + r(1 - q) \\
\overline{r} &= 461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 1{,}014\, 10^{-2} + 287\,\mathrm{J/(kg\,K)}(1 - 1{,}014\, 10^{-2}) \\
\overline{r} &= 288{,}76\,\mathrm{J/(kg\,K)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_s &= 293\,\mathrm{K} \left(\frac{100}{70}\right)^{\frac{1}{\frac{1013{,}67\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{288{,}76\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\, 10^{6}\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}\, 293\,\mathrm{K}}}} \\
T_s &= 286{,}1\,\mathrm{K} = 13{,}1^{\circ}\mathrm{C}
\end{aligned}$$

- Para el cálculo de la tensión de vapor en el nivel de condensación (e) necesitamos conocer la presión en dicho nivel, la cual la obtenemos aplicando una de las ecuaciones de Poisson. En ésta realizaremos la siguiente aproximación: $\overline{\gamma} \approx \gamma$ (téngase en cuenta que el cálculo puede realizarse también de forma exacta)

$$\begin{aligned}
\frac{T_1^{\gamma}}{T_2^{\gamma}} &= \frac{P_1^{\gamma - 1}}{P_2^{\gamma - 1}} \\
P_2 &= P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\
P_2 &= 1012\,\mathrm{hPa} \left(\frac{286{,}1\,\mathrm{K}}{293\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} \\
P_2 &= 931\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

A continuación calcularemos la tensión de vapor a partir de la proporción de mezcla,

supuesta constante en el ascenso.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{m} &= \epsilon \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{P} - \mathrm{e}} \\
\mathrm{e} &= \frac{\mathrm{m\,P}}{\epsilon + \mathrm{m}} \\
\mathrm{e} &= \frac{1{,}024\,10^{-2} \cdot 931\,\mathrm{hPa}}{0{,}622 + 1{,}024\,10^{-2}} \\
\mathrm{e} &= 15{,}08\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}
$$

Nótese que al tratarse de aire saturado e coincide con E(286,1 K).

- La proporción de mezcla permanece constante siempre y cuando no se llegue a producir la condensación, así pues $\mathrm{m} = 1{,}024\,10^{-2}$

---

72. Una masa de aire húmedo asciende por vía adiabática desde el suelo ($P = 1000$ hPa) hasta los 700 hPa donde se alcanza la saturación. Sabiendo que la temperatura del suelo es de 288 K, determínense la tensión de vapor en el nivel inicial y el punto de rocío en tierra. Dato E(15°C)=17,04 hPa.

Solución:

(a) Tensión de vapor en el nivel inicial (e):

- En primer lugar calculamos la temperatura en el nivel de condensación (T_2) mediante una de las ecuaciones de Poisson. En ella suponemos la siguiente aproximación: $\overline{\gamma} \approx \gamma$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{T}_1^{\gamma}}{\mathrm{T}_2^{\gamma}} &= \frac{\mathrm{P}_1^{\gamma - 1}}{\mathrm{P}_2^{\gamma - 1}} \\
\mathrm{T}_2 &= \mathrm{T}_1 \left(\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \\
\mathrm{T}_2 &= 288\,\mathrm{K} \left(\frac{700\,\mathrm{hPa}}{1000\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1{,}4 - 1}{1{,}4}} \\
\mathrm{T}_2 &= 260{,}1\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

- A continuación calculamos la humedad en el nivel inicial, realizando la siguiente aproximación $\overline{c_p} \approx c_p$ y $\overline{\mathrm{r}} \approx \mathrm{r}$. Además sabemos que la temperatura calculada anteriormente es la temperatura de saturación.

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{r} - \frac{\epsilon L}{r\,T_0}}$$

$$h_0 = \frac{h}{\left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{r} - \frac{\epsilon L}{r\,T_0}}}$$

$$h_0 = \frac{100}{\left(\frac{260{,}1\,K}{288\,K}\right)^{\frac{1005\,J/(kg\,K)}{287\,J/(kg\,K)} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\,10^6\,J/kg}{287\,J/(kg\,K) \cdot 288\,K}}}$$

$$h_0 = 20{,}85\,\%$$

- Así pues, la tensión de vapor en el nivel inicial será:

$$h = \frac{e}{E}\,100$$

$$e = \frac{E\,h}{100}$$

$$e = \frac{17{,}04\,hPa \cdot 20{,}85}{100}$$

$$e = 3{,}6\,hPa$$

(b) Temperatura de rocío en el nivel inicial (T_r):

- La temperatura de rocío en el nivel inicial se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\ln\frac{h}{h_0} = \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_0}\right)$$

$$T_r = \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{r_a}{L}\ln\frac{100}{h_0}}$$

$$T_r = \frac{1}{\frac{1}{288\,K} + \frac{461\,J/(kg\,K)}{2{,}51\,10^6\,J/kg}\ln\frac{100}{20{,}85}}$$

$$T_r = 265{,}95\,K = -7{,}05^\circ C$$

---

73. Calcúlese la tensión de vapor de una masa de aire sabiendo que asciende adiabáticamente desde el nivel de presión 1010 mb hasta el de 800 mb, donde se alcanza el nivel de condensación, siendo la temperatura inicial del aire $T_0 = 285$ K.

Dato: E(285K)=14,01 hPa.

Solución:

- En primer lugar calculamos T_2 mediante una ecuación de Poisson donde realizando la siguiente aproximación: $\overline{\gamma} \approx \gamma$. Dicha temperatura corresponde a la temperatura de saturación.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{\gamma}}{T_2^{\gamma}} &= \frac{P_1^{\gamma-1}}{P_2^{\gamma-1}} \\
T_2 &= T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
T_2 &= 285\,\mathrm{K} \left(\frac{800\,\mathrm{hPa}}{1010\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\
T_2 &= 266{,}63\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

- La humedad relativa en el nivel inicial, será la siguiente. Realizamos la siguiente aproximación $\overline{c_p} \approx c_p$ y $\bar{r} \approx r$.

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{h_0} &= \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\bar{r}} - \frac{\epsilon L}{r T_0}} \\
h_0 &= \frac{h}{\left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{r} - \frac{\epsilon L}{r T_0}}} \\
h_0 &= \frac{100}{\left(\frac{266{,}63\,\mathrm{K}}{285\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 285\,\mathrm{K}}}} \\
h_0 &= 35{,}4\,\%
\end{aligned}
$$

- Por último, la tensión de vapor se obtendrá a partir de la humedad relativa:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{e}{E}\,100 \\
e &= \frac{h\,E}{100} \\
e &= \frac{35{,}4 \cdot 14{,}01\,\mathrm{hPa}}{100} \\
e &= 5\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}
$$

---

74. Determine el nivel de condensación por ascenso adiabático de una masa de aire sabiendo que en el nivel inicial $T = 20°C$ y $h = 70\,\%$.

Solución:

- En primer lugar calculamos la temperatura de saturación a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{r} - \frac{\epsilon L}{r T_0}}$$

$$T_s = T_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{\frac{\overline{c_p}}{r} - \frac{\epsilon L}{r T_0}}}$$

$$T_s = 293\,K \left(\frac{100}{70}\right)^{\frac{1}{\frac{1005\,J/(kg\,K)}{287\,J/(kg\,K)} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\,10^6\,J/kg}{287\,J/(kg\,K) \cdot 293\,K}}}$$

$$T_s = 286{,}14\,K$$

- A continuación calculamos Γ suponiendo que $\overline{c_p} \approx c_p$ mediante la aplicación del primer principio:

$$\Gamma = \frac{g}{c_p}$$

$$\Gamma = \frac{9{,}8\,m/s^2}{1005\,J/(kg\,K)}$$

$$\Gamma = 9{,}75\,10^{-3}\,K/m$$

- Por último, la altura de equilibrio vendrá dada por la siguiente expresión, en la cual suponemos que $T_0/T_0' \approx 1$:

$$T = T_0 - \Gamma\,z\,\frac{T_0}{T_0'}$$

$$z = \frac{T_0 - T}{\Gamma}$$

$$z = \frac{293\,K - 286{,}14\,K}{9{,}75\,10^{-3}\,K/m}$$

$$z = 703{,}5\,m$$

---

75. Calcúlense el punto de rocío y la humedad relativa inicial, sabiendo que el nivel de condensación por ascenso adiabático de una masa de aire, que inicialmente está a 12°C, se encuentra a 1800 m.

Dato: $E(12°C) = 14{,}1$ hPa.

Solución:

(a) Cálculo de la humedad relativa inicial (h_0):

- Calculamos la temperatura de saturación a partir de la aproximación de una elevación adiabática, suponiendo que $T_0/T_0' \approx 1$:

$$
\begin{aligned}
T &= T_0 - \Gamma\, z\, \frac{T_0}{T_0'} \\
T &= 285\,\mathrm{K} - \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot 1800\,\mathrm{m} \\
T &= 267{,}45\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

- La humedad relativa será la siguiente. Realizamos la aproximación $\overline{c_p} \approx c_p$ y $\bar{r} \approx r$.

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{h_0} &= \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\bar{r}} - \frac{\epsilon L}{r\, T_0}} \\
h_0 &= \frac{h}{\left(\frac{T_s}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{r} - \frac{\epsilon L}{r\, T_0}}} \\
h_0 &= \frac{100}{\left(\frac{267{,}45\,\mathrm{K}}{285\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 285\,\mathrm{K}}}} \\
h_0 &= 37{,}12\,\%
\end{aligned}
$$

- La temperatura de rocío será finalmente:

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{h}{h_0} &= \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_0}\right) \\
T_r &= \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{r_a}{L} \ln \frac{100}{h_0}} \\
T_r &= \frac{1}{\frac{1}{285\,\mathrm{K}} + \frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}} \ln \frac{100}{37{,}12}} \\
T_r &= 271\,\mathrm{K} = -2^{\circ}\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

---

76. Una masa de aire con una temperatura de 10°C y una presión P = 990 hPa tiene una humedad relativa h = 80 %. Determiner la altura y presión del nivel de condensación si la masa de aire sufre un ascenso adiabático.

Solución:

(a) Altura de condensación (z_{sat}):

- Calculamos en primer lugar la temperatura de saturación (T_s), la cual obtenemos de la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}_0} &= \left(\frac{\mathrm{T}_s}{\mathrm{T}_0}\right)^{\frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{r}}} - \frac{\epsilon\,\mathrm{L}}{\mathrm{r}\,\mathrm{T}_0}} \\
\mathrm{T}_s &= \mathrm{T}_0 \left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}_0}\right)^{\frac{1}{\frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{r}}} - \frac{\epsilon\,\mathrm{L}}{\mathrm{r}\,\mathrm{T}_0}}} \\
\mathrm{T}_s &= 283\,\mathrm{K}\left(\frac{100}{80}\right)^{\frac{1}{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622\cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 283\,\mathrm{K}}}} \\
\mathrm{T}_s &= 279{,}01\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

- A continuación calculamos la altura de condensación:

$$
\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}'_0}\,\Gamma\,\mathrm{z}_{sat}
$$

Suponemos que $\mathrm{T}_0/\mathrm{T}'_0 \approx 1$, por lo que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z}_{sat} &= \frac{\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}}{\Gamma} \\
\mathrm{z}_{sat} &= \frac{283\,\mathrm{K} - 279{,}01\,\mathrm{K}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}/1005\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}} \\
\mathrm{z}_{sat} &= 409\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(b) Presión en el nivel de equilibrio (P_2):

- Utilizamos una de las ecuaciones de Poisson para los procesos adiabáticos, suponiendo que $\overline{\gamma} \approx \gamma$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{T}_1^{\gamma}}{\mathrm{T}_2^{\gamma}} &= \frac{\mathrm{P}_1^{\gamma-1}}{\mathrm{P}_2^{\gamma-1}} \\
\mathrm{P}_2 &= \mathrm{P}_1\left(\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\mathrm{P}_2 &= 990\,\mathrm{hPa}\left(\frac{279{,}01\,\mathrm{K}}{283\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} \\
\mathrm{P}_2 &= 942{,}0\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}
$$

---

77. Una masa de aire saturado (sin contenido de agua líquida) en la cima de una montaña está a una presión P = 750 hPa y una temperatura T = 268 K. Suponiendo que se fuerza un descenso adiabático hasta la base de la montaña, donde P = 950 hPa, determínense la temperatura y humedad relativa finales del proceso.

Solución:

(a) Temperatura final del proceso (T_2):

- Calculamos (T_2), que es la temperatura correspondiente al nivel inferior, utilizando una de las ecuaciones de Poisson para los procesos adiabáticos:

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{\gamma}}{T_2^{\gamma}} &= \frac{P_1^{\gamma-1}}{P_2^{\gamma-1}} \\
T_2 &= T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\
T_2 &= 268\,\mathrm{K} \left(\frac{950\,\mathrm{hPa}}{750\,\mathrm{hPa}}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \\
T_2 &= 286{,}7\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

(b) Humedad relativa final del proceso (h_0):

- La humedad relativa se obtendrá a partir de la siguiente expresión, en la que suponemos la aproximación $\overline{c_p} \approx c_p$ y $\bar{r} \approx r$.

$$
\begin{aligned}
\frac{h_1}{h_2} &= \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\overline{c_p}}{\bar{r}} - \frac{\epsilon L}{r\,T_2}} \\
h_2 &= \frac{h_1}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{c_p}{r} - \frac{\epsilon L}{r\,T_2}}} \\
h_2 &= \frac{100}{\left(\frac{268\,\mathrm{K}}{286{,}7\,\mathrm{K}}\right)^{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622 \cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 286{,}7\,\mathrm{K}}}} \\
h_2 &= 35{,}2\,\%
\end{aligned}
$$

---

78. Una masa de aire se encuentra en la falda de una montaña con una temperatura de 20°C y una humedad relativa h=90 %, mientras que el aire circundante tiene una temperatura de 15°C. Se observa que el aire empieza a ascender y da lugar a la formación de nubes 100 m antes de llegar a la cima de la montaña. En la cima de la montaña existe una estación meteorológica que mide una humedad específica q=0,001. La masa de aire desciende por la ladera opuesta de la montaña llegando al suelo con una temperatura 0,5°C superior a la original. Si α = 0,0065°C/m y la presión en la falda de la montaña es P = 1013 hPa, calcúlese:

   (a) Altura de la montaña.
   (b) Humedad específica y relativa de la masa de aire en el punto final.
   (c) Temperatura de la masa de aire en la cumbre.
   (d) Mínimo valor de α para que pueden formarse las nubes.

Datos: $E(20°C) = 23{,}48$ hPa, emplee si fuera necesario $ln(T/T_0) \approx (T - T_0)/T_0$.

Solución:

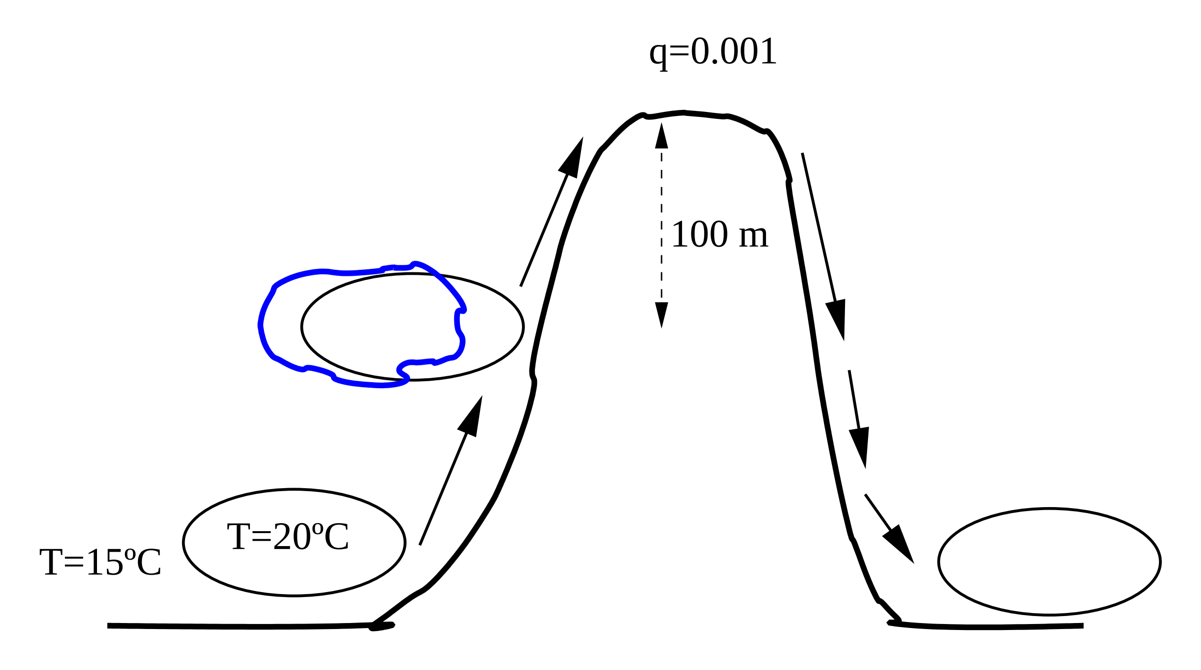


Figura 3.1: Ascenso de una masa de aire por la falda de una montaña con el correspondiente descenso por la ladera opuesta

(a) Altura de la montaña (H):

- En primer lugar calculamos la temperatura de saturación de dicha masa de aire, suponiendo que $\overline{c_p} \approx c_p$ y $\overline{\gamma} \approx \gamma$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h_0}} &= \left(\frac{\mathrm{T}_s}{\mathrm{T_0}}\right)^{\frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{r}}} - \frac{\epsilon\,\mathrm{L}}{\mathrm{r\,T_0}}} \\
\mathrm{T}_s &= \mathrm{T_0}\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h_0}}\right)^{\frac{1}{\frac{\overline{\mathrm{c}_p}}{\overline{\mathrm{r}}} - \frac{\epsilon\,\mathrm{L}}{\mathrm{r\,T_0}}}} \\
\mathrm{T}_s &= 293\,\mathrm{K}\left(\frac{100}{90}\right)^{\frac{1}{\frac{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}} - \frac{0{,}622\cdot 2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 293\,\mathrm{K}}}} \\
\mathrm{T}_s &= 290{,}95\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

- A continuación calculamos la altura de condensación a partir de la siguiente expresión. Suponemos que $\overline{\Gamma} \approx \Gamma$:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - \overline{\Gamma}\, H_{sat}\, \frac{T_0}{T_0'} \\ H_{sat} &= \frac{(T_0 - T) T_0'}{\Gamma\, T_0} \\ H_{sat} &= \frac{(293\,\text{K} - 290{,}95\,\text{K}) \cdot 288\,\text{K}}{9{,}75\,10^{-3}\,\text{K/m} \cdot 293\,\text{K}} \\ H_{sat} &= 207\,\text{m} \end{aligned}$$

- Como la masa de aire condensa 100 m antes de llegar a la cima, la altura de ésta será:

$$H = 207 + 100 = 307 \text{ m}$$

(b) Humedad específica (q) y relativa (h) de la masa de aire en el punto final:

- Si la humedad específica (q) en la cumbre de la montaña era 0.001, en el punto final seguirá siendo la misma puesto que no se ha producido pérdida de masa. Asi pues, en el punto final, $q = 0{,}001$.

- Para calcular la humedad relativa (h), calculamos en primer lugar la tensión saturante (E) para la temperatura en el punto final, $T = 20{,}5°$C mediante la fórmula de Magnus:

$$\begin{aligned} E(20{,}5°\text{C}) &= 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45 \cdot 20{,}5(°\text{C})}{234{,}07 + 20{,}5(°\text{C})}}\,\text{hPa} \\ E(20{,}5°\text{C}) &= 24{,}28\,\text{hPa} \end{aligned}$$

- A continuación calculamos la proporción de mezcla (m) para poder obtener posteriormente la presión parcial del vapor de agua (e):

$$\begin{aligned} q &= \frac{m}{m + 1} \\ m &= \frac{q}{1 - q} \\ m &= \frac{0{,}001}{1 - 0{,}001} \\ m &= 1{,}001\,10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \epsilon \cdot \frac{e}{P - e} \\ e &= \frac{m\,P}{\epsilon + m} \\ e &= \frac{1{,}001\,10^{-3} \cdot 1013\,\text{hPa}}{0{,}622 + 1{,}001\,10^{-3}} \\ e &= 1{,}62\,\text{hPa} \end{aligned}$$

- Por último, la humedad relativa será la siguiente:

$$\begin{aligned} h &= \frac{e}{E}\,100 \\ h &= \frac{1{,}62\,\text{hPa}}{24{,}28\,\text{hPa}} \cdot 100 \\ h &= 6{,}7\,\% \end{aligned}$$

(c) Temperatura de la masa de aire en la cumbre (T):

- Calculamos el gradiente adiabático $\overline{\Gamma}$ que posee la masa de aire en la cumbre:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma} &= \frac{g}{c_p} \\ \overline{\Gamma} &= \frac{g}{c_{pa}\,q + c_{ps}(1 - q)} \\ \overline{\Gamma} &= \frac{9{,}8\,\text{m/s}^2}{1860\,\text{J/(kg K)} \cdot 0{,}001 + 1005\,\text{J/(kg K)}(1 - 0{,}001)} \\ \overline{\Gamma} &= 9{,}74\,10^{-3}\,\text{K/m} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la temperatura de la masa de aire en la cumbre será la siguiente:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - \overline{\Gamma}\,H\,\frac{T_0}{T_0'} \\ T &= 293{,}5\,\text{K} - 9{,}74\,10^{-3}\,\text{K/m} \cdot 307\,\text{m} \cdot \frac{293{,}5\,\text{K}}{288\,\text{K}} \\ T &= 290{,}4\,\text{K} \end{aligned}$$

(d) Mínimo valor de α para que puedan formarse nubes:

- Para que se formen las nubes, es decir, para que se produzca la condensación del vapor de agua, debe cumplirse que $H_{sat} = H_{eq}$; así pues:

$$\begin{aligned} T' &= T \\ T_0' - \alpha\,H_{sat} &= T_0 - \frac{T_0}{T_0'}\,\overline{\Gamma}\,H_{sat} \\ \alpha &= \frac{T_0' - T_0 + (T_0/T_0')\overline{\Gamma}\,H_{sat}}{H_{sat}} \\ \alpha &= \frac{288\,\text{K} - 293\,\text{K} + (293\,\text{K}/288\,\text{K})\,9{,}74\,10^{-3}\,\text{K/m} \cdot 207\,\text{m}}{207\,\text{m}} \\ \alpha &= -\,0{,}014\,\text{K/m} \end{aligned}$$

---

79. Determínese el gradiente pseudoadiabático para los siguientes valores:

(a) $P_1 = 980$ hPa, $T_1 = 285$K, $E_1 = 14{,}01$ hPa

(b) $P_2 = 1012$ hPa, $T_2 = 293$K, $E_2 = 23{,}38$ hPa

(c) $P_3 = 500$ hPa, $T_3 = 258$K, $E_3 = 1{,}91$ hPa

Solución:

- El gradiente pseudoadiabático viene dado mediante la siguiente expresión:

$$\Gamma_{pseud} = \Gamma \frac{\mathrm{P} + \epsilon \frac{\mathrm{LE}}{\mathrm{rT}}}{\mathrm{P} + \epsilon \frac{\mathrm{L}}{c_p} \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dT}}}$$

- Atendiendo a la ecuación de Clasius-Clapeyron, sabemos que $\mathrm{dE/dT} = \mathrm{LE/r}_a\,\mathrm{T}^2$, por lo que, sustituyendo en la ecuación anterior, nos queda lo siguiente:

$$\Gamma_{pseud} = \Gamma \frac{\mathrm{P} + \epsilon \frac{\mathrm{LE}}{\mathrm{rT}}}{\mathrm{P} + \epsilon \frac{\mathrm{L}}{c_p} \frac{\mathrm{L\,E}}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}^2}}$$

(a) $\mathrm{P}_1 = 980$ hPa, $\mathrm{T}_1 = 285$K, $\mathrm{E}_1 = 14{,}01$ hPa

$$\Gamma_{pseud} = \Gamma \frac{\mathrm{P}_1 + \epsilon \frac{\mathrm{L\,E}_1}{\mathrm{r\,T}_1}}{\mathrm{P}_1 + \epsilon \frac{\mathrm{L}}{c_p} \frac{\mathrm{L\,E}_1}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_1^2}}$$

$$\Gamma_{pseud} = \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{980\,\mathrm{hPa} + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 14{,}01\,\mathrm{hPa}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 285\,\mathrm{K}}}{980\,\mathrm{hPa} + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 14{,}01\,\mathrm{hPa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 285^2\,\mathrm{K}^2}}$$

$$\Gamma_{pseud} = 4{,}98\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$$

(b) $\mathrm{P}_2 = 1012$ hPa, $\mathrm{T}_2 = 293$K, $\mathrm{E}_2 = 23{,}38$ hPa

$$\Gamma_{pseud} = \Gamma \frac{\mathrm{P}_2 + \epsilon \frac{\mathrm{L} \cdot \mathrm{E}_2}{\mathrm{r} \cdot \mathrm{T}_2}}{\mathrm{P}_2 + \epsilon \frac{\mathrm{L}}{c_p} \cdot \frac{\mathrm{L} \cdot \mathrm{E}_2}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_2^2}}$$

$$\Gamma_{pseud} = \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \frac{1012\,\mathrm{hPa} + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 23{,}38\,\mathrm{hPa}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 293\,\mathrm{K}}}{1012\,\mathrm{hPa} + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6,\mathrm{J/kg}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 23{,}38\,\mathrm{hPa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 293^2\,\mathrm{K}^2}}$$

$$\Gamma_{pseud} = 4{,}25\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$$

(c) $\mathrm{P}_3 = 500$ hPa, $\mathrm{T}_3 = 258$K, $\mathrm{E}_3 = 1{,}91$ hPa

$$\Gamma_{pseud} = \Gamma \frac{\mathrm{P}_3 + \epsilon \frac{\mathrm{L} \cdot \mathrm{E}_3}{\mathrm{r\,T}_3}}{\mathrm{P}_3 + \epsilon \frac{\mathrm{L}}{c_p} \frac{\mathrm{L\,E}_3}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_3^2}}$$

$$\Gamma_{pseud} = \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{500\,\mathrm{hPa} + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 1{,}91\,\mathrm{hPa}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 258\,\mathrm{K}}}{500\,\mathrm{hPa} + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 1{,}91\,\mathrm{hPa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 258^2\,\mathrm{K}^2}}$$

$$\Gamma_{pseud} = 7{,}09\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}$$

---

80. Determine el descenso de temperatura de una masa de aire saturado que se eleva adiabáticamente 500 m, sabiendo que en el nivel inicial la presión es de 850 hPa y T = 273 K.

Solución:

- Calculamos en primer lugar el gradiente pseudoadiabático, el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$\Gamma_{pseud} = \Gamma \frac{P + \epsilon \frac{LE}{rT}}{P + \epsilon \frac{L}{c_p} \frac{dE}{dT}}$$

- A continuación sustituimos $dE/dT = LE/r_a\, T^2$, según Clasius-Clapeyron, por lo que nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{pseud} &= \Gamma \cdot \frac{P + \epsilon \frac{LE}{rT}}{P + \epsilon \frac{L}{c_p} \cdot \frac{L\,E}{r_a\,T^2}} \\
\Gamma_{pseud} &= \frac{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{850\,\mathrm{hPa} + 0{,}622 \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 6{,}1\,\mathrm{hPa}}{287\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 273\,\mathrm{K}}}{850\,\mathrm{hPa} + 0{,}622 \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}} \cdot \frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg} \cdot 6{,}1\,\mathrm{hPa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 273^2\,\mathrm{K}^2}} \\
\Gamma_{pseud} &= 6{,}13\,10^{-3}\,\mathrm{K/m}
\end{aligned}$$

- Como $\Gamma_{pseud} = -\frac{dT}{dz}$, el incremento de temperatura debido al ascenso de 500 m será:

$$\begin{aligned}
\Delta T &= -\Gamma_{pseud} \cdot z \\
\Delta T &= 6{,}13\,10^{-3}\,\mathrm{K/m} \cdot 500\,\mathrm{m} \\
\Delta T &= -3\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

---

81. En un proceso de enfriamiento isobárico por radiación en una masa de aire saturado a presión atmosférica (1013 hPa) se produce la condensación de 1,5 g de vapor por m^3 de aire. Sabiendo que la temperatura inicial de la masa de aire es $T_i = 285$ K, calcúlese la temperatura final del proceso.

Solución:

- En primer lugar calculamos las humedades absolutas inicial (a_0) y final (a_F):

$$\begin{aligned}
E(12^\circ C) &= 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45 \cdot 12(^\circ C)}{234{,}07 + 12(^\circ C)}}\,\mathrm{hPa} \\
E(12^\circ C) &= 14{,}08\,\mathrm{hPa}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}_0 &= \frac{\mathrm{E}(12°\mathrm{C})}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_0} \\
\mathrm{a}_0 &= \frac{1408\,\mathrm{hPa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}\cdot 285\,\mathrm{K}} \\
\mathrm{a}_0 &= 0{,}01072\,\mathrm{kg/m^3} = 10{,}72\,\mathrm{g/m^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_F &= a_0 + \Delta a \\
a_F &= 0{,}01072\,\mathrm{kg/m^3} - 0{,}0015\,\mathrm{kg/m^3} \\
a_F &= 9{,}22\,10^{-3}\,\mathrm{kg/m^3} = 9{,}22\,\mathrm{g/m^3}
\end{aligned}
$$

- En el estado final se han de cumplir simultáneamente la ecuación de estado $\mathrm{E}_F = \mathrm{a}_F\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_F$ y la de Clasius-Clapeyron $\ln\frac{\mathrm{E}_F}{\mathrm{E}_0} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}_a}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_0} - \frac{1}{\mathrm{T}_F}\right)$. Para poder trabajar con ambas expresiones es preciso realizar la aproximación $\ln\frac{\mathrm{E}_F}{\mathrm{E}_0} \approx \frac{\mathrm{E}_F - \mathrm{E}_0}{\mathrm{E}_0}$. Por lo tanto nos quedarían las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_F &= \mathrm{A}_F\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_F \\
\mathrm{E}_F - \mathrm{E}_0 &= \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{E}_0}{\mathrm{r}_a}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_0} - \frac{1}{\mathrm{T}_F}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_F\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_F^2 - \mathrm{E}_0\,\mathrm{T}_F &= \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{E}_0\,\mathrm{T}_F}{\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_0} - \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{E}_0}{\mathrm{r}_a} fg \\
\mathrm{A}_F\,\mathrm{r}_a\,\mathrm{T}_F^2 - \left(\mathrm{E}_0 + \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{E}_0}{\mathrm{r}_a}\frac{1}{\mathrm{T}_0}\right)\mathrm{T}_F + \frac{\mathrm{L}\,\mathrm{E}_0}{\mathrm{r}_a} &= 0 \\
4{,}25\mathrm{T}_F^2 - 28307\mathrm{T}_F + 7666117 &= 0 \\
\mathrm{T}_F &= 282{,}8\,\mathrm{K}\ .
\end{aligned}
$$

Existe otra forma de resolver este tipo de problemas empleando la ecuación de Clausius-Clapeyron sin integrar y la que se obtiene diferenciando A:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dA} &= \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{r}_a\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{r}_a\mathrm{T}^2}\mathrm{dT} \\
\mathrm{dE} &= \frac{\mathrm{L}\ \mathrm{E}}{\mathrm{r}_a\mathrm{T}^2}\mathrm{dT}
\end{aligned}
$$

Combinando ambas expresiones se puede relacionar directamente $\Delta\mathrm{A}$ con $\Delta\mathrm{T}$

$$
\Delta\mathrm{T} \approx \frac{\Delta\mathrm{A}}{\frac{\mathrm{L}\ \mathrm{E}}{\mathrm{r}_a^2\mathrm{T}^3} - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{r}_a\mathrm{T}^2}}
$$

Sustituyendo se obtiene:

$$
\Delta\mathrm{T} \approx \frac{-1{,}5\mathrm{g/m^3}}{\frac{2500\mathrm{J/g}\cdot 1408\mathrm{Pa}}{(0{,}418\mathrm{J/(g\ K)})^2(285\mathrm{K})^3} - \frac{1408\mathrm{Pa}}{0{,}418\mathrm{J/(g\ K)}(285\mathrm{K})^2}} = -1{,}81\mathrm{K}
$$

por tanto

$$T_F \approx 283{,}2\text{K} \quad .$$

---

82. Determine el calor perdido por una masa de aire saturado sabiendo que en dos horas se ha condensado 1 g de vapor por m^3 de aire. El proceso es isobárico siendo $P_0 = 1010$ hPa y $T_0 = 15°$C.

Dato: E(15°C)=17,04 hPa

Solución:

- El calor perdido por unidad de masa de aire (que designaremos con q' para no confundirlo con la humedad específica, q) puede calcularse mediante la siguiente expresión, obtenida a partir del primer principio de la termodinámica:

$$\begin{aligned} \delta q' &= c_p dT + L\delta q \\ q' &\approx c_p \Delta T + L\Delta q \end{aligned}$$

- Necesitamos conocer ΔT y Δq y para ello las humedades absolutas, tanto inicial (A_0), como final (A_F):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{E(15°C)}{r_a T_0} = \frac{1704\,\text{Pa}}{461\,\text{J/(kg K)} \cdot 288\,\text{K}} = 0{,}0128\,\text{kg/m}^3 \quad , \\ A_F &= a_0 - \Delta A = 0{,}0128\,\text{kg/m}^3 - 0{,}001\,\text{kg/m}^3 = 0{,}0118\,\text{kg/m}^3 \quad . \end{aligned}$$

- Además, sabemos que en el estado final se han de cumplir simultáneamente la ecuación de estado para el vapor de agua, $E_F = A_F r_a T_F$, y la ecuación de Clasius-Clapeyron, $\ln\frac{E_F}{E_0} = \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_F}\right)$. De nuevo en la ecuación de Clausius-Clapeyron es preciso realizar la aproximación $\ln\frac{E_F}{E_0} \approx \frac{E_F - E_0}{E_0}$. Las ecuaciones que resultan finalmente son:

$$\left.\begin{aligned} E_F &= A_F r_a T_F \\ E_F - E_0 &= \frac{L E_0}{r_a}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_F}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} a_F r_a T_F^2 - E_0 T_F &= \frac{L E_0 T_F}{r_a T_0} - \frac{L E_0}{r_a} \\ a_F r_a T_F^2 - \left(E_0 + \frac{L E_0}{r_a}\frac{1}{T_0}\right) T_F + \frac{L E_0}{r_a} &= 0 \\ 5{,}4398 T_F^2 - 33773{,}3 T_F + 9240781 &= 0 \\ T_F &= 286{,}9\,\text{K} \quad . \end{aligned}$$

Calculamos también la presión saturante final (E_F):

$$\begin{aligned} E_F &= A_F\, r_a\, T_F \\ E_F &= 0{,}0118\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 286{,}9\,\mathrm{K} \\ E_F &= 1561\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

- Así pues, teniendo en cuenta que el incremento de humedad específica puede expresarse como $\Delta q = \epsilon \Delta E/P_0$, el calor perdido por la masa de aire será el siguiente:

$$\begin{aligned} q' &= c_p \Delta T + L \Delta q \\ q' &= c_p \Delta T + \epsilon \frac{L}{P_0}(E_F - E_0) \\ q' &= 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot (286{,}9\,\mathrm{K} - 288\,\mathrm{K}) + 0{,}622\,\frac{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}{1010\,\mathrm{hPa}}(15{,}61\,\mathrm{hPa} - 17{,}04\,\mathrm{hPa}) \\ q' &= -3316\,\mathrm{J/kg} \approx -3{,}3\,\mathrm{J/g} \end{aligned}$$

Al igual que en el problema anterior podía haberse optado por resolver de una forma aproximada:

$$\begin{aligned} \Delta T &\approx \frac{\Delta A}{\dfrac{L\,E}{r_a^2 T^3} - \dfrac{E}{r_a T^2}} \\ \Delta q &\approx \epsilon \frac{\Delta E}{P} \end{aligned}$$

---

83. La temperatura y humedad relativa en el exterior de una casa son 40°C y 40 %, respectivamente. En la casa hay instalado un aparato de aire acondicionado que toma aire del exterior, lo enfría y lo introduce en la casa. El proceso de enfriamiento comienza poniendo el aire en contacto con un circuito de refrigeración, que lo lleva a una temperatura de 0°C , produciéndose la saturación de la masa de aire y la correspondiente condensación del vapor de agua que tuviera en exceso. Una vez que el aire entra en la casa alcanza una temperatura de 20°C . Teniendo en cuenta que todo el proceso se desarrolla a presión constante e igual a 1013 hPa se pide: (a) representar gráficamente el proceso, (b) calcular la cantidad de agua por unidad de volumen y por unidad de masa de aire que se condensa en el proceso de enfriamiento, (c) calcular la humedad relativa del aire que entra en la habitación.

Datos: E(40°C)=74,5 hPa, E(20°C)=23,48 hPa, E(0°C)=6,11 hPa.

Solución:

(a) Representación gráfica del proceso:

(b) Cantidad de agua por unidad de volumen (Δa) y por unidad de masa (Δq) que se condensa en el proceso.

- En primer lugar calculamos la presión parcial del vapor de agua (e_e), la humedad absoluta (a_e) y la humedad específica (q_e) correspondientes al exterior de la casa.

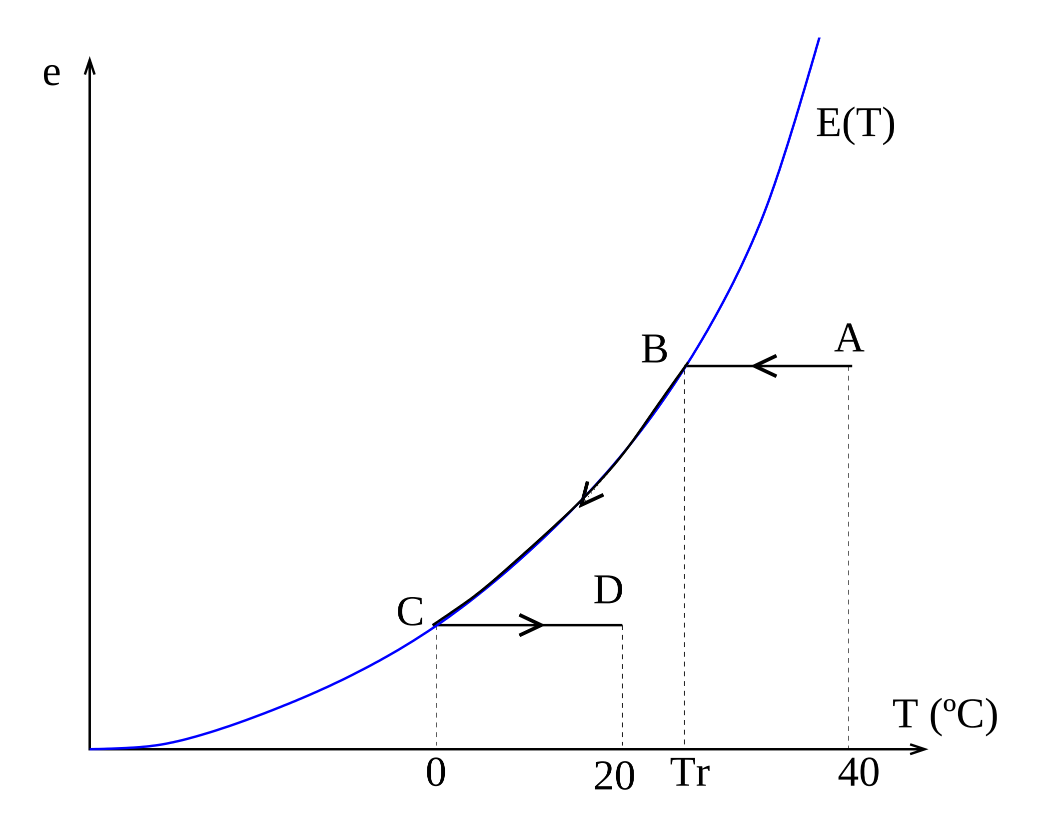


Figura 3.2: Representación esquemática del funcionamiento de un aparato de aire acondicionado en un diagrama e-T.

$$
\begin{aligned}
e_e &= \frac{h_e\,E_e}{100} \\
e_e &= \frac{40 \cdot 74{,}5\,\mathrm{hPa}}{100} \\
e_e &= 29{,}8\,\mathrm{hPa} \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_e &= \frac{e_e}{r_a\,T_e} \\
a_e &= \frac{2980\,\mathrm{Pa}}{461\,\mathrm{J/(kg\,K)} \cdot 313\,\mathrm{K}} \\
a_e &= 2{,}065\,10^{-2}\,\mathrm{kg/m^3} \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_e \approx m_e &= \epsilon\frac{e_e}{P_e - e_e} \\
q_e &= 0{,}622 \cdot \frac{29{,}8\,\mathrm{hPa}}{1013\,\mathrm{hPa} - 29{,}8\,\mathrm{hPa}} \\
q_e &= 0{,}0189 \quad .
\end{aligned}
$$

- En el aire acondicionado se produce el enfriamiento hasta una $T_{ac} = 0°\mathrm{C}$, además de alcanzarse la saturación de la masa de aire y la condensación del vapor de agua en

exceso. Calculamos la presión parcial del vapor de agua (e_{ac}), la humedad absoluta (a_{ac}) y la humedad específica (q_{ac}) para dicha situación.

$$e_{ac} = E(0°C) = 6{,}11\,hPa$$

$$a_{ac} = \frac{e_{ac}}{r_a\,T_{ac}}$$
$$a_{ac} = \frac{611\,Pa}{461\,J/(kg\,K)\cdot 273\,K}$$
$$a_{ac} = 4{,}854\,10^{-3}\,kg/m^3$$

$$q_{ac} \approx m_{ac} = \epsilon\frac{e_{ac}}{P - e_{ac}}$$
$$q_{ac} = 0{,}622\cdot\frac{6{,}11\,hPa}{1013\,hPa - 6{,}11\,hPa}$$
$$q_{ac} = 3{,}774\,10^{-3} \quad .$$

- Por lo tanto, ya podemos calcular Δa y Δq:

$$\Delta a = a_e - a_{ac}$$
$$\Delta a = 2{,}064\,10^{-2}\,kg/m^3 - 4{,}854\,10^{-3}\,kg/m^3$$
$$\Delta a = 1{,}6\,10^{-2}\,kg/m^3 = 16\,g/m^3 \quad .$$

$$\Delta q = q_e - q_{ac}$$
$$\Delta q = 0{,}0189 - 3{,}774\,10^{-3}$$
$$\Delta q = 1{,}51\,10^{-2} = 15{,}1\,g/kg \quad .$$

Tenga en cuenta que $q_{ac} = q_{final}$.

(c) Humedad relativa en la habitación (h_i):

$$h_i = \frac{e_i}{E_i}100$$
$$h_i = \frac{q_i\,P_i}{\epsilon\,E_i}100$$
$$h_i = \frac{q_{ac}\cdot P_i}{\epsilon\cdot E_i}\cdot 100$$
$$h_i = \frac{3{,}774\,10^{-3}\cdot 1013\,hPa}{0{,}622\cdot 23{,}48\,hPa}\cdot 100$$
$$h_i = 26{,}17 \approx 26\,\% \quad .$$

---

84. En una masa de aire saturado a T = 10°C y presión P = 998 hPa se produce una condensación isobárica por irradiación nocturna. Sabiendo que se han condensado 2 g/m^3 de vapor, determínese el descenso de temperatura necesario para que ocurra este cambio de fase, así como la pérdida de calor que acompaña al proceso.

Dato: E(10°C)=12,3 hPa.

Solución:

- En primer lugar calculamos las humedades absolutas, tanto inicial (A_0), como final (A_F).

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{E(10°C)}{r_a\,T_0} \\ A_0 &= \frac{1230\,\text{Pa}}{461\,\text{J/(kg K)} \cdot 283{,}15\,\text{K}} \\ A_0 &= 9{,}42\,10^{-3}\,\text{kg/m}^3 \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_F &= A_0 - \Delta a \\ A_F &= 9{,}42\,10^{-3}\,\text{kg/m}^3 - 2\,10^{-3}\,\text{kg/m}^3 \\ A_F &= 7{,}42\,10^{-3}\,\text{kg/m}^3 \end{aligned}$$

- A continuación necesitamos obtener E_F y T_F, que calculamos usando la aproximación analítica del problema anterior.

$$\left.\begin{aligned} E_F &= a_F\,r_a\,T_F \\ \ln\frac{E_F}{E_0} \approx \frac{E_F - E_0}{E_0} &= \frac{L}{r_a}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_F}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} a_F\,r_a\,T_F^2 - E_0\left(1 + \frac{L}{r_a\,T_0}\right)T_F + \frac{L\,E_0}{r_a} &= 0 \\ 3{,}4216\,T_F^2 - 24787{,}4\,T_F + 6{,}6703\,10^6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_F &= 279{,}912\,\text{K} = 6{,}8°\text{C} \\ E_F &= 9{,}57\,\text{hPa} \approx 9{,}6\,\text{hPa} \quad . \end{aligned}$$

- Por último calculamos la pérdida de calor que acompaña al proceso, sabiendo que éste viene expresado mediante: $q' = c_p\,\Delta T + L\,\Delta q$

De nuevo este problema podría hacerse de forma aproximada.

$$\begin{aligned} q' &\approx c_p\,(T_F - T_0) + L\,\frac{\epsilon}{P_0}\,(E_F - E_0) \\ q' &\approx 1005\,\text{J/(kg K)}\,(6{,}8°\text{C} - 10°\text{C}) + 2{,}51\,10^6\,\text{J/kg}\,\frac{0{,}622}{998\,\text{hPa}}\,(9{,}6\,\text{hPa} - 12{,}3\,\text{hPa}) \\ q' &\approx -7440\,\text{J/kg} = -7{,}4\,\text{J/g} \quad . \end{aligned}$$

---

85. Una masa saturada asciende, de forma que siempre se encuentra saturada, desde el nivel de 700 mb y $T = 273$K hasta el de 650 mb. Sabiendo que se condensa en el proceso una proporción de mezcla $m = 7{,}3\,10^{-4}$, calcúlese el descenso de temperatura que tiene lugar.

Dato: E(10°C)=6,11 hPa. Usar Magnus si fuera necesario.

Solución:

- Calculamos en primer lugar la proporción de mezcla inicial (m_0) y la proporción de mezcla final (m_F)

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_0 &= \epsilon\,\frac{\mathrm{E}(0°C)}{\mathrm{P}_0 - \mathrm{E}(0°C)} \\ \mathrm{m}_0 &= 0{,}622\,\frac{6{,}11\,\mathrm{hPa}}{700\,\mathrm{hPa} - 6{,}11\,\mathrm{hPa}} \\ \mathrm{m}_0 &= 5{,}477\,10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_F &= \mathrm{m}_0 - \Delta\mathrm{m} \\ \mathrm{m}_F &= 5{,}477\,10^{-3} - 7{,}3\,10^{-4} \\ \mathrm{m}_F &= 4{,}747\,10^{-3} \end{aligned}$$

- La presión parcial final del vapor de agua será

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_F &= \epsilon\,\frac{\mathrm{e}_F}{\mathrm{P}_F - \mathrm{e}_F} \\ \mathrm{e}_F &= \frac{\mathrm{m}_F \cdot \mathrm{P}}{\epsilon + \mathrm{m}_F} \\ \mathrm{e}_F &= \frac{4{,}747\,10^{-3} \cdot 650\,\mathrm{hPa}}{0{,}622 + 4{,}747\,10^{-3}} \\ \mathrm{e}_F &= 5\,\mathrm{hPa} \end{aligned}$$

- Teniendo presente que ambas tensiones son de saturación, puede emplearse la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$\begin{aligned} \ln\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0} &= \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{r}_a}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_0} - \frac{1}{\mathrm{T}_F}\right) \\ \mathrm{T}_F &= \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{T}_0} - \ln\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0} \cdot \frac{\mathrm{r}_a}{\mathrm{L}}} \\ \mathrm{T}_F &= \frac{1}{\frac{1}{273\,\mathrm{K}} - \ln\frac{5\,\mathrm{hPa}}{6{,}11\,\mathrm{hPa}} \cdot \frac{461\,\mathrm{J/(kg\,K)}}{2{,}51\,10^6\,\mathrm{J/kg}}} \\ \mathrm{T}_F &= 270{,}3\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, el descenso de temperatura que tiene lugar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta\mathrm{T} &= \mathrm{T}_F - \mathrm{T}_0 \\ \Delta\mathrm{T} &= 270{,}3\,\mathrm{K} - 273\,\mathrm{K} \\ \Delta\mathrm{T} &= -2{,}7\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

---

86. Sean dos masas de aire húmedo, teniendo la segunda el doble de masa que la primera. Supongamos que sufren un proceso de mezcla horizontal, siendo sus valores iniciales de temperatura y humedad: $T_1 = 0°C$, $h_1 = 90\,\%$, $E_1 = 6{,}12$ mb, $T_2 = 20°C$, $h_2 = 40\,\%$, $E_2 = 23{,}4$ mb. La presión a la que se desarrolla el proceso es $P_0 = 1000$ mb. Calcúlese:

   (a) e_1, e_2 y e final, e_F.

   (b) Temperatura final de la mezcla.

   (c) ¿Se alcanza la saturación al mezclar las dos masas?

   Solución:

   (a) Presión parcial de ambas masas de aire y de la mezcla final (e_1, e_2 *y* e_F)

   - Calcularemos las presiones parciales a partir de las humedades de cada masa de aire, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h &= \frac{e}{E}\,100 \\ e &= \frac{E\,h}{100} \\ e_1 &= \frac{6{,}12\,\text{mb}\cdot 90}{100} = 5{,}51\,\text{mb} \\ e_2 &= \frac{23{,}4\,\text{mb}\cdot 40}{100} = 9{,}36\,\text{mb} \end{aligned}$$

   - La presión parcial final de la mezcla se calculará atendiendo al peso relativo de las masas de dichas masas de aire húmedo. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} e_F &= \frac{e_1 + 2e_2}{3} \\ e_F &= \frac{5{,}51\,\text{mb} + 2\cdot 9{,}36\,\text{mb}}{3} \\ e_F &= 8{,}1\,\text{mb} \end{aligned}$$

   (b) Temperatura de la mezcla (T_F):

   - Si suponemos que no existen pérdidas de calor, para que se mantenga el equilibrio debe cumplirse lo siguiente:

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_{s1} + Q_{a1} + Q_{s2} + Q_{a2} = 0$$

$$\begin{aligned} & m_{s1}\,C_s\,(T_F - T_1) + m_{a1}\,C_a\,(T_F - T_1) \\ + \quad & m_{s2}\,C_s\,(T_F - T_2) + m_{a2}\,C_a\,(T_F - T_2) = 0 \end{aligned}$$

- Por otro lado sabemos que: $m_{si} = M_i - qM_i = M_i(1-q_i)$ así como que $m_{ai} = q_iM_i$. Si sustituimos en la ecuación anterior nos quedaría lo siguiente:

$$\begin{aligned} & (1-q_1)M_1C_s(T_F - T_1) + q_1M_1C_a(T_F - T_1) \\ + \quad & (1-q_2)2M_1C_s(T_F - T_2) + q_2M_12C_a(T_F - T_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \big((1-q_1)C_s + q_1C_a + 2(1-q_2)C_s + 2q_2C_a\big)T_F = \\ (1-q_1)C_sT_1 + q_1C_aT_1 + (1-q_2)2C_sT_2 + 2q_2C_aT_2 \end{gathered}$$

$$T_F = \frac{(1-q_1)C_sT_1 + q_1C_aT_1 + (1-q_2)2C_sT_2 + 2q_2C_aT_2}{(1-q_1)C_s + q_1C_a + 2(1-q_2)C_s + 2q_2C_a}$$

- Calculamos las humedades específicas de las dos masas de aire que se mezclan, (q_1) y (q_2):

$$\begin{aligned} q_1 &\approx m_1 = \epsilon \frac{e_1}{P_0 - e_1} \\ q_1 &= 0{,}622 \frac{5{,}51\,\text{mb}}{1000\,\text{mb} - 5{,}51\,\text{mb}} \\ q_1 &= 3{,}44\,10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &\approx m_2 = \epsilon \frac{e_2}{P_0 - e_2} \\ q_2 &= 0{,}622 \frac{9{,}36\,\text{mb}}{1000\,\text{mb} - 9{,}36\,\text{mb}} \\ q_2 &= 5{,}87\,10^{-3} \end{aligned}$$

- Como q_1, $q_2 << 1$, la temperatura final puede expresarse de la siguente manera.

$$\begin{aligned} T_F &= \frac{T_1 + 2T_2}{3} \\ T_F &= \frac{273\,\text{K} + 2 \cdot 293\,\text{K}}{3} \\ T_F &= 286{,}3\,\text{K} = 13{,}3°\text{C} \end{aligned}$$

(c) Para que se alcanze la saturación, debe cumplirse la condición $e_F \geq E_F$. Por ello calcularemos la tensión saturante correspondiente a la temperatura de la mezcla y compararemos los valores de e_F y E_F.

$$\begin{aligned} E(13{,}3°\text{C}) &= 6{,}1\,10^{\frac{7{,}45 \cdot 13{,}3(°\text{C})}{234{,}07 + 13{,}3}}\,\text{mb} \\ E(13{,}3°\text{C}) &= 15{,}3\,\text{mb} \end{aligned}$$

- Como $e_F < E_F$, no se alcanza la saturación de la masa de aire.

---

87. Si se consideran las dos masas de aire húmedo del problema anterior ($T_1 = 0°C$, $h_1 = 90\,\%$, $T_2 = 20°C$, $M_2 = 2M_1$), ¿qué humedad relativa es necesario que tenga la masa M_2 para que tras el proceso de mezcla horizontal se alcance la saturación? Supóngase que la presión a la que se desarrolla el proceso es $P_0 = 1000$ mb y que q_1 y q_2 son mucho menores que uno.

Solución:

- Para que se alcanze la saturación la presión parcial del vapor de agua final de la mezcla debe ser igual a la tensión de saturación, es decir, $e_F = E_F$.

- Calcularemos en primer lugar la humedad específica necesaria para que se produzca la condensación, usando $T_F = 13{,}3°C$

$$
\begin{aligned}
m_F &= \epsilon \frac{e_F}{P - e_F} \\
m_F &= 0{,}622 \frac{15{,}3\,\text{hPa}}{1000\,\text{hPa} - 15{,}3\,\text{hPa}} \\
m_F &= 9{,}66\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_F &= \frac{m_F}{m_F + 1} \\
q_F &= \frac{9{,}66\,10^{-3}}{9{,}66\,10^{-3} + 1} \\
q_F &= 9{,}56\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

- A continuación calculamos la humedad específica necesaria que debe presentar la masa de aire M_2. Para ello debemos obtener también la humedad específica de la masa de aire M_1.

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \epsilon \frac{e_1}{P - e_1} \\
m_1 &= 0{,}622 \frac{5{,}51\,\text{hPa}}{1000\,\text{hPa} - 5{,}51\,\text{hPa}} \\
m_1 &= 3{,}45\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{m_1}{m_1 + 1} \\
q_1 &= \frac{3{,}45\,10^{-3}}{3{,}45\,10^{-3} + 1} \\
q_1 &= 3{,}44\,10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
q_F &= \frac{q_1 + 2q_2}{3} \\
q_2 &= \frac{3q_F - q_1}{2} \\
q_2 &= \frac{3 \cdot 9{,}56\,10^{-3} - 3{,}44\,10^{-3}}{2} \\
q_2 &= 0{,}013 \approx m_2
\end{aligned}$$

- Por último obtendremos la presión parcial del vapor de agua correspondiente a dicha proporción de mezcla; y, a partir de ésta, la humedad relativa.

$$\begin{aligned}
m_2 &= \epsilon \frac{e_2}{P - e_2} \\
e_2 &= \frac{m_2\,P}{\epsilon + m_2} \\
e_2 &= \frac{0{,}013 \cdot 1000\,\text{mb}}{0{,}622 + 0{,}013} \\
e_2 &= 20{,}48\,\text{mb}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{e_2}{E_2}\,100 \\
h_2 &= \frac{20{,}48\,\text{mb}}{23{,}4\,\text{mb}} \cdot 100 \\
h_2 &= 87\,\% \quad .
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] A. Maya, “Problemas de meteorología superior”, Instituto Nacional de Meteorología, (Madrid). 1989.

[2] C. García-Legaz Martínez y F. Castejón de la Cuesta, “Problemas de meteorología”, Instituto Nacional de Meteorología, (Madrid). 1986.

[3] F. Morán Samaniego, “Apuntes de termodinámica de la atmósfera”, Instituto Nacional de Meteorología (Madrid). 1984.